Математический анализ

Глава 2

Определённый интеграл Римана:

§1 опр. инт. Римана

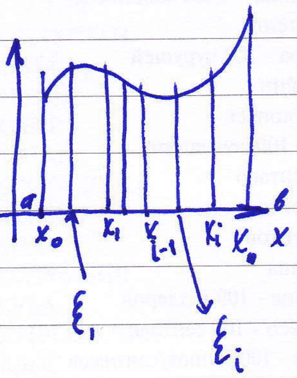
О 1 Разбиением T отрезка $[a,b]$, $a<b$, называется конечная система точек $x_0, x_1, \dots, x_n$ $: a=x_0<x_1<\dots<x_n=b$; $[x_{i-1}, x_i] =: \Delta_i$ – отрезки разбиения T; $\lambda(T) = \max\{\Delta x_i\}$;
$1 \le i \le n$,
$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$

диаметр разбиения T

О.2. Говорят, что имеется разбиение (T, ξ) с промежуточными точками отрезка $[a,b]$, T, $\forall i$ $\xi_i \in \Delta_i$ $(i=1,2..n)$, набор $(\xi_1, \dots \xi_n) =: \xi$

О 3. Если функция f определена на $[a,b]$, (T,ξ) – разбиение с промежуточными точками то $\sigma(f;T,\xi) = \sigma(T,\xi) :=$
$:= \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ – разбиение $f(\xi)$ с промеж. т.

$\sigma(T,\xi)$ = площади прям. с длиной Δx_i и высотой $f(\xi_i)$
$\sigma(T,\xi)$ = площади ступенчатой фигуры получающийся всем объединением прямоугольников



Опр. 4 I – интеграл Римана от f на $[a,b]$

Если $\forall \varepsilon>0$ $\exists \delta>0$ $\forall (T,\xi)$ с пром. точками $[a,b]$

$\lambda(T)<\delta \Rightarrow \left|I - \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i\right| < \varepsilon$

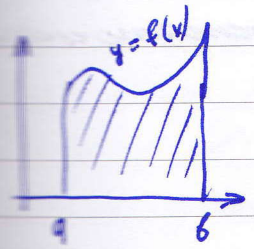
диаметр

I – предел интегральной суммы при $\lambda(T) \to 0$

$$I = \lim_{\lambda(T)\to 0} \sigma(T,\xi) \quad (1)$$

Дата/Date

Из (Опр4) => Для отрицательных f I - является пределом $\lambda(T)\to 0$ последовательности площадей ступ. фигуры, => связан с S, $y=f(x)$, $[a,b]$ ом x-ов и $x=a$, $x=b$.



$I = S$

Интеграл от $f(x)$ по отрезку $[a,b]$ обознач. символом $\int_a^b f(x)\,dx$, где a и b - верхний и нижний пределы интегрирования f - подынтегральная ф-я, x - переменная интегрирования

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{\lambda(T)\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \quad (2)$$

- Функция f называется ... если для неё определён интеграл Римана.
- Множество всех ф-ий интегрируемых на отрезке будем обозначать $R[a,b]$

(Т) Необходимое усл. интегрирования.

(Т) $f(x)$ интегрируема на $[a,b]$ - необходимо чтоб она была ограничена на $[a,b]$

(Д) Возьмём $\forall \delta>0$ $\forall (T,\xi)$ $\lambda(T)<\delta$, предположим что f не ограничена на $[a,b]$, то она не ограничена на одном отрезке $\Delta_k < T$, (T,ξ'). (T,ξ) отличающаяся на одну прои. т. $\xi'_k \in \Delta_k$ $(\xi'_k \neq \xi_k)$

$$|\sigma(T,\xi') - \sigma(T,\xi)| = |f(\xi'_k) - f(\xi_k)|\,\Delta x_k$$

Дата/Date

ξ_k $((T,\xi))$. $\xi_k' \in \Delta_k$ можно сделать $|f(\xi_k') - f(\xi_k)|\Delta x_k$ сколь угодно большим

$\Rightarrow$ f - огран. на $[a, b]$

Зам. Условие ограничен. не является достаточным

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x\text{-рац} \\ 0, & x\text{ иррац} \end{cases} \quad x \in [0, 1]$$

T и два разбиения (T, ξ'), (T, ξ'') с промежут. точками $\xi_1', \dots, \xi_n'$; $\xi_1'', \dots, \xi_n''$; $\sigma(T, \xi') - \sigma(T, \xi'') = 1 \neq 0$, $\lambda(T) \to 0$ следоват. f - не интегрируема.

§3 Суммы Дарбу и их св-ва

Опр. 1 Пусть f - определена и ограничена на $[a, b]$. T - разбиение отр $[a, b]$, Δ_i $(i = 1, 2 \dots n)$ - отрезки разбиения, $m_i = \inf\{f(x) : x \in \Delta_i\}$, $M_i = \sup\{f(x) : x \in \Delta_i\}$,

$$s(f; T) = s(T) = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i, \quad S(f; T) = S(T) = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i$$

Если (T, ξ) - произвольн. разбиение с пром. т., то очевидно $s(T) \leq \sigma$

Лемма 1 $s(f; T) = \inf\limits_{\xi} \sigma(f; (T; \xi))$ (2) $S(f; T) = \sup\limits_{\xi} \sigma(f; (T; \xi))$

Д (3) Когда (1) достаточно $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \bar{\xi}$ $S(f; T) < \sigma(f; (T, \bar{\xi}))$

по опр M_i $i \in \{1 \dots n\}$ $\exists \bar{\xi}_i \in \Delta_i$ $M_i < f(\bar{\xi}_i) + \frac{\varepsilon}{b-a}$, пусть $\bar{\xi} = (\bar{\xi}_1 \dots \bar{\xi}_n)$

$$\sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i < \sum_{i=1}^n \left(f(\bar{\xi}_i) + \frac{\varepsilon}{b-a}\right) \Delta x_i = \sum_{i=1}^n f(\bar{\xi}_i) + \varepsilon, \text{ ч.т.д.}$$

Опр 2. Если $\tilde{T}$ $[a,b]$ получено из T, только добавлением некоторых точек, то назовём $\tilde{T}$ - продолжением T

- пример: $\tilde{T}$ T', T'' может служить $\tilde{T} = T' \cup T''$ -
- полученное объединением т. разбиения.

Л.2 Если $\tilde{T}$ - явл. продолжением разбиения
$s(f;T) \le s(f;\tilde{T})$, $S(f,\tilde{T}) \le S(f,T)$

$\tilde{T}$ получено из T добавл. одной точки.
Предположим что $\tilde{x} \in \Delta_k = [x_{k-1}, x_k]$ S $M_k \Delta x_k$ - заменится на $M_k'(\tilde{x} - x_{k-1}) + M_k''(x_k - \tilde{x})$, $M_k' = \sup\{f(x): x \in [x_{k-1}, \tilde{x}_k]\}$ $M_k'' = \sup\{f(x): x \in [\tilde{x}, x_k]\}$, $M_k' \le M_k$, $M_k'' \le M_k$, то $M_k'(\tilde{x} - x_{k-1}) + M_k''(x_k - \tilde{x}) \le M_k(\tilde{x} - x_{k-1}) + M_k(x_k - \tilde{x}) = M_k \cdot \Delta x_k$.

Т.к. все другие слагаемое S сохранятся то при добавлении $\tilde{x}$ верхняя S может. уменьш.

Л.3 Для двух произвольных T', T'' $s(f,T') \le S(f,T'')$

Д Рассмотрим $\tilde{T} = T' \cup T''$ по Л.2 имеем:
$s(T') \le s(\tilde{T}) \le S(\tilde{T}) \le S(T'')$

С $\{s(f:T)\}$ - множество нижних сумм Дарбу ограничено сверху. и наоборот

Опр.3 $I_*(f) = \sup_T \{s(f:T)\}$, $I^*(f) = \inf_T \{S(f:T)\}$ -

- назыв. нижним и верхним интегралом Дарбу.
$I_*(f) \le I^*(f)$ (5)

§4 Необходим. и дост. св-ва интегр.

Для того чтобы огр на $[a,b]$, $f(x)$ была интегрируема на $[a,b]$ необходимо и дост:

$$\lim_{\lambda(T)\to 0}\left(S(f:T)-s(f:T)\right)=0 \quad (1)$$

② необх $I=\lim \sigma(T,\xi)$ $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \lambda(T)<\delta \Rightarrow$
$\Rightarrow |\sigma(T,\xi)-I|<\varepsilon$

Из Л.1: $I-\varepsilon\le s(T)\le S(T)\le I+\varepsilon$ $\quad I-\varepsilon<\sigma(f,T)<I+\varepsilon$

$\lim\limits_{\lambda(T)\to 0} s(T)=I$, $\lim\limits_{\lambda(T)\to 0} S(T)=I$ $\Rightarrow (1)$

Дост. (1) - выполнено, $s(T)\le I_*\le I^*\le S(T)$ (сл 3)

то $I_*=I^*=:I$, $s(T)\le I\le S(T)$ (2)

$\forall T\ \ s(T)\le\sigma(T,\xi)\le S(T)$ (3)

Из (2) и (3) $\Rightarrow$ $|\sigma(T,\xi)-I|\le S(T)-s(T)$ откуда в силу (1) $\Rightarrow$ что I оно является опр. интегралом f

!Зам. (НЧД) Если обозначим колебание $M_i-m_i=:\omega(f:\Delta_i)$ то будем иметь $S(T)-s(T)=\sum(M_i-m_i)\Delta x_i=\sum\omega(f:\Delta_i)\Delta x_i$

поэтому условие (1) можно записать в виде:

$$\lim_{\lambda(T)\to 0}\sum_{i=1}^{n}\omega(f:\Delta_i)\Delta x_i=0$$

§5 Т. если $(f\in C[a,b])\Rightarrow(f\in R[a,b])$

Непрерывная на отрезке ф-я является равномерно непрерывной $\Rightarrow$ $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$ $\Delta\subset[a,b]$ δ $\omega(f:\Delta)\le\frac{\varepsilon}{b-a}$

$\forall T\ \lambda(T)<\delta$ $\quad\sum\limits_{i=1}^{n}\omega_i(f,\Delta_i)\Delta x_i<\frac{\varepsilon}{b-a}\sum\limits_{i=1}^{n}\Delta x_i=\frac{\varepsilon}{b-a}(b-a)=\varepsilon$

в силу КИР $f \in R[a, b]$

(T) Монотонная на отрезке функция интегрируема на этом отрезке

(Д) $f = const$ - исключим. $f(x)\uparrow$, тогда $\omega(f; [a, b]) =$
$= f(b) - f(a)$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \delta = \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}$ пусть T - произв. разб $\lambda(T) < \delta$, тогда для него с учётом монотонности имеем:

$$\sum_{i=1}^{n} \omega(f, \Delta_i) \Delta x_i < \delta \sum_{i=1}^{n} \omega(f, \Delta_i) = \delta \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_{i-1})) =$$

$$= \delta (f(b) - f(a)) = \varepsilon$$

Т.о. $f \in R[a, b]$

(З) Монотонная ф-я может иметь беск. много точек разрыва.

(T) Если ограниченная на $[a, b]$ f непрерывна всюду кроме быть может конечного точек, то она интегрируема

Интеграл как линейная ф-я на $R[a,b]$

(Т) Если $f, g \in R[a,b]$ то их линейная комбинация $\alpha f + \beta g$ также интегрируема на $R[a,b]$ причём $\boxed{\int_a^b (\alpha f + \beta g)(x)\,dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx \quad (1)}$

(Д) $\sum_{i=1}^{n} (\alpha f + \beta g)(\xi_i)\Delta x_i = \alpha \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i + \beta \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\Delta x_i \quad (2)$

правая часть (2) $\to$ к правой части (1), то левая часть при $\lambda(T)\to 0$ имеет предел совпадающий с правой частью $\alpha f + \beta g \in R[a,b]$

(С) Если ф-ии рассматривать как векторы то $R[a,b]$ является относительным линейным пространством при этом $I = I(f)$ - есть линейная ф-я, т.е.

$I(\alpha f + \beta g) = \alpha I(f) + \beta I(g)$

• Ф-ии определённые на функц. назыв. функционалом $I = I(f) = \int_a^b f(x)dx$ - линейный функционал на $R[a,b]$

§7 Интеграл - как аддитивная ф-я на $[a,b]$

(Л.1) Если $f \in R[a,b] \Rightarrow$ то она интегрируема на любом отрезке $[c,d]$ - входящим в $[a,b]$ $([c,d]\subset[a,b])$

(Д) Пусть T - разбиение $[c,d]$ добавим к T некоторые точки до $\tilde{T}$ отрезка $[a,b]$, но так чтобы иметь $\lambda(\tilde{T}) \le \lambda(T)$, ясно что это всегда можно сделать

$\sum_T \omega(f,\Delta i)\Delta x_i \le \sum_{\tilde{T}} \omega(f,\Delta i)\Delta x_i$

$\sum$ - сумма разбиений T

$\lambda(T)\to 0 \Rightarrow \lambda(\tilde{T})\to 0$

по КИР $f\big|_{[c,d]} \in R[c,d]$

(12) $a<b<c$, $f \in R[a,c]$, то $f\big|_{[a,b]} \in R[a,b]$, $f\big|_{[b,c]} \in R[b,c]$ и имеет место:

$$\boxed{\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx \quad (1)}$$

(Д) Интегр. ограниченной $\Rightarrow$ из Л. 1, поскольку $f \in R[a,c]$, то находя $\int_a^c f(x)dx$, как предел интегральной суммы, мы имеем право рассм. любое разбиение (a,c) в частн. только те T, которые содержат т. b. Каждое такое разбиение (T,ξ) порождает разбиение (T',ξ'), (T'',ξ'') отрезков $[a,b]$ и $[b,c]$

причём $T = T' \cup T''$ и $\xi = \xi' + \xi''$, но тогда

$\sigma(f,(T,\xi)) = \sigma(f,(T',\xi')) + \sigma(f,(T'',\xi''))$

поскольку $\lambda(T') \leq \lambda(T)$; $\lambda(T'') \leq \lambda(T)$ при $\lambda(T) \to 0$, каждая интегральная сумма $\to$ к интегралу из (1)

- Условимся след: $a>b$, $f \in R[b,a]$, то

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx := -\int_b^a f(x)dx \quad (2)}$$

- Если f опред. в a, то

$$\boxed{\int_b^a f(x)dx := 0 \quad (3)}$$

(Т) $a,b,c \in R$, $f \in R$[на большем отрезке в указанных точках]

тогда $f \in R$ на каждом из двух других отрезках:

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx + \int_c^a f(x)dx = 0 \quad (4)}$$

Дата/Date

② В силу симметрии (4) отчасти (а.в,с) можно считать, что $a := \min\{a, b, c\}$, $\max\{a, b, c\} = c$ и $a < b < c$, то по Л.1

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx - \int_a^c f(x)\,dx = 0},$$

что с учетом (2) даёт (4)

- если $\max\{a, b, c\} = b$, и $a < c < b$, то по Л.1

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^c f(x)\,dx - \int_c^b f(x)\,dx = 0},$$

то с учётом (2) даёт (4)

- Если какието 2 и все 3 из точек а,в,с совпадают, то (4) => из соотношений (2) и (3)

⓪ Пусть каждой упорядоченной паре (α, β) точек $\alpha, \beta \in [a, b]$ поставлено в соответствие число $y(\alpha, \beta)$ причём так, что для $\forall\, \alpha, \beta, \gamma \in [a, b]$:

$$\boxed{y(\alpha, \gamma) = y(\alpha, \beta) + y(\beta, \gamma)}$$

тогда ф-я $y(\alpha, \beta)$ - наз. аддитивной ф-ей промежутка, определённых на промежутках $[a, b]$.

- Если $f \in R[a, b]$ и $\alpha, \beta, \gamma \ni [a, b]$ то:

$$\boxed{y(\alpha, \beta) = \int_\alpha^\beta f(x)\,dx}$$

из соотн (4):

$$\int_\alpha^\gamma f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(x)\,dx + \int_\beta^\gamma f(x)\,dx,$$

т.е $\int$ есть аддитивная функция промежутка интегрирования.

Дата/Date

§8 ~~Интегриров~~

~~Интегрируемость~~

$|f|$, $f\cdot g$ $\frac{f}{g}$

(1) Если $f, g \in R[a,b]$, то:

а) $|f| \in R[a,b]$

б) $f\cdot g \in R[a,b]$

в) $\frac{f}{g} \in R[a,b]$, при условии что $\inf\{|g(x)| : x \in [a,b]\} > 0$

(Д) а) Поскольку $\omega(|f|)$ на множ. $E \le \omega(f; E)$ на E, то сумма

$$\sum_{i=1}^{n} \omega(|f|, \Delta_i)\Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} \omega(f, \Delta_i)\Delta x_i$$

и на основ. КИР заключаем, что $|f| \in R[a,b]$

б) Докажем вначале что если $f \in R[a,b]$, то $f^2 \in R[a,b]$, т.к. $f \in R[a,b] \Rightarrow f$-огр на $[a,b] \Rightarrow$
$\Rightarrow \exists\, c>0 \;\; |f(x)| \le c \;\; \forall x \in [a,b]$

Тогда $|f^2(x_1) - f^2(x_2)| = |f(x_1)+f(x_2)|\cdot|f(x_1)-f(x_2)| \le$
$\le 2c\cdot|f(x_1)-f(x_2)|$

откуда

$$\omega(f^2; E) \le 2c\,\omega(f; E) \quad \text{если } E \subset [a,b]$$

значит

$$\sum_{i=1}^{n} \omega(f^2, \Delta_i)\Delta x_i \le 2c \sum_{i=1}^{n} \omega(f, \Delta_i)\Delta x_i$$ откуда по КИР заключаем что $f^2 \in R[a,b]$

В общ. случ: $(f\cdot g) = \frac{1}{4}\left((f+g)^2(x) - (f-g)^2(x)\right)$ с учётом только что доказ. и линейного св-ва интегралов имеем $(f\cdot g) \in R[a,b]$