



<https://doi.org/10.38013/2542-0542-2022-2-74-92>

УДК 531.55, 623.764

## **Кинематический анализ методов пропорциональной навигации применительно к наведению зенитной управляемой ракеты на баллистическую цель**

П. А. Созинов, Б. Н. Горевич

*Акционерное общество «Концерн воздушно-космической обороны «Алмаз – Антей», Москва, Российская Федерация*

Выполнен кинематический анализ четырех методов пропорциональной навигации (*PPN, TPN, IPN, PPN-I*). Дано физическое и математическое описание методов и построена модель движения ЗУР при наведении на баллистическую цель.

Выбраны и обоснованы показатели качества наведения: нормальные ускорения, мгновенный промах (величина и фаза) и характеристическая управляющая скорость ракеты.

Проведена оценка качества наведения ЗУР на заключительном участке движения баллистической цели для различных методов. Выполнен сравнительный анализ методов с учетом достигаемых показателей качества и возможностей технической реализации.

*Ключевые слова:* зенитная управляемая ракета (ЗУР), метод пропорциональной навигации, кинематика ракеты

*Для цитирования:* Созинов П. А., Горевич Б. Н. Кинематический анализ методов пропорциональной навигации применительно к наведению зенитной управляемой ракеты на баллистическую цель // Вестник Концерна ВКО «Алмаз – Антей». 2022. № 2. С. 74–92. <https://doi.org/10.38013/2542-0542-2022-2-74-92>

*For citation:* Sozinov P. A., Gorevich B. N. Kinematic analysis of proportional navigation methods as applicable to surface-to-air missile guidance to a ballistic target // Vestnik Koncerna VKO "Almaz – Antey". 2022. No. 2. P. 74–92. <https://doi.org/10.38013/2542-0542-2022-2-74-92>

*Поступила 27.01.2022 Отрецензирована 14.03.2022 Одобрена 14.03.2022 Опубликована 17.05.2022*

### **Введение. Постановка задачи**

Пропорциональная навигация как закон управления полетом является основой для построения современных систем самонаведения ЗУР. Методы пропорциональной навигации, реализующие этот закон в виде управляющих ускорений, обладают рядом свойств, выгодно отличающих их от других методов наведения. Одним из таких свойств является то, что на заключительном участке полета ЗУР, за несколько единиц – десятков секунд до ее встречи с целью, если цель не маневрирует, а ракета выведена на участок самонаведения на цель без существенных угловых ошибок,

то наведение осуществляется фактически по методу параллельного сближения. В свою очередь, достоинством метода параллельного сближения является обеспечение наведения ракеты на неманеврирующую цель без поперечных перегрузок. Последнее позволяет сэкономить энергию («располагаемые перегрузки») ракеты для отработки внезапного маневра цели на конечном участке наведения и в итоге минимизировать промах.

Данное свойство пропорциональной навигации особенно актуально при перехвате баллистических целей – для них характерен регулярный (кеплеровский) характер движения вне атмосферы и интенсивное торможение с большими перегрузками (воспринимаемыми

© Созинов П. А., Горевич Б. Н., 2022



системой управления ракеты как маневр) при входе в атмосферу и движении в ней. Кроме того, современные баллистические цели (боевые блоки и головные части баллистических ракет) создаются способными при движении в атмосфере совершать интенсивные маневры и в поперечном направлении за счет использования аэродинамических органов управления. Ранее такими маневрирующими целями были головные части баллистических ракет *Pershing II* (производство США, ракета снята с вооружения в 1991 г.), а в настоящее время в различных странах мира активно создаются современные виды гиперзвукового оружия, выводимого к цели с использованием баллистических и аэробаллистических траекторий и способного активно маневрировать в стратосфере.

Сам метод параллельного сближения не получил распространения в системах самонаведения ввиду сложности технической реализации, а также недостатков при работе по маневрирующим целям и в условиях переменной скорости ракеты (что характерно для современных твердотопливных ЗУР, имеющих, как правило, короткий разгонный участок и участок пассивного полета, на котором скорость ракеты интенсивно снижается под действием сил сопротивления воздуха и гравитации), в то время как методы пропорциональной навигации в этих условиях имеют хорошие свойства, которые, собственно, и исследуются в настоящей статье.

Другими ценными свойствами пропорциональной навигации как закона управления являются возможность адаптации траектории ракеты к условиям полета за счет изменения всего одного параметра – коэффициента пропорциональности, а также достаточно простая техническая реализация на борту ЗУР.

Основы теории пропорциональной навигации были впервые сформулированы в США в 1943 году (первая известная монография вышла в 1945 г. [1]). Практически одновременно и независимо сходные результаты были получены немецкими учеными при разработке ракетных систем в 1944–1945 годах. В нашей стране эта теория получила развитие и практическое применение в послевоенные годы – уже

в начале 1960-х годов на основе пропорциональной навигации были созданы первые системы самонаводящегося зенитного управляемого ракетного оружия С-200 [2–5] и «Куб».

Однако, несмотря на большую историю развития, из-за преимущественно военного применения, прежде всего в системах ракетного вооружения, теория пропорциональной навигации (в трехмерном представлении и в различных возможных вариантах реализации) широкого освещения не получала и стала достоянием общественности только в последние десятилетия.

Сущность и свойства некоторых методов пропорциональной навигации в настоящее время детально описаны и исследованы в специальной литературе. Наиболее значимыми являются работы зарубежных авторов: классические, многократно переизданные труды П. Зарчана (США) [6, 7], монография Н. А. Шнейдора (Израиль) [8], статьи Ю. С. Шукла и П. Р. Махапатра (Индия) [9, 10]. Среди отечественных публикаций выделяются монографии Е. И. Кринецкого [11], В. Я. Мизрохи [12], фундаментальная монография под ред. И. С. Голубева и В. Г. Светлова [13], лекции А. В. Беляева [14], а также более ранние статьи А. С. Кельзона и В. Л. Кана [15–17], в которых описаны базовые принципы пропорциональной навигации.

В настоящее время в доступной литературе описаны четыре метода пропорциональной навигации. Наиболее известны методы, именуемые в ряде зарубежных работ *PPN* (*Pure Proportional navigation* – «чистая пропорциональная навигация») и *TPN* (*True Proportional navigation* – «истинная пропорциональная навигация»). Данные названия методов (как и другие) условны и не отражают их сущности и свойств, а используются лишь для различения методов. Известен также метод, получивший в [8] название *IPN* (*Ideal Proportional navigation* – «идеальная пропорциональная навигация»). Именно этот метод в большинстве отечественных работ последних десятилетий описывается как метод пропорциональной навигации и рассматривается безальтернативно, как основа современных систем самонаведения ракет (см., например, [12–14]).



Кроме названных методов в англоязычной Википедии [18] при описании пропорциональной навигации приведено соотношение для управляющего ускорения, формируемого по методу (без специального наименования для него), который в настоящей статье для удобства, в силу его свойств, сочетающих свойства методов *PPN* и *IPN*, рассматриваемых ниже, обозначен как *PPN-I*. При этом отсылка Википедии по поводу этого метода к монографии Р. Янушевского [19] несостоятельна – в монографии описан метод *IPN*.

Все четыре перечисленные метода (*PPN*, *TPN*, *IPN*, *PPN-I*) отличаются как свойствами, определяющими способность перехвата цели управляемой ракетой, так и возможностями по их технической (аппаратной) реализации.

Несмотря на детальное описание отдельных методов пропорциональной навигации в специальной литературе, вопрос их сравнения и выбора остается открытым. В качестве работ, где выполнено обстоятельное сравнение, но только двух методов – *PPN* и *TPN*, можно назвать монографию [8] и статью [9]. Некоторые самые общие сравнительные сведения по методам *PPN*, *TPN* и *PPN-I* приведены в Википедии [18]. Анализ названных методов в перечисленных работах носит формально-математический характер и не позволяет однозначно отдать предпочтение какому-либо методу (за исключением [9], где из пары *PPN* и *TPN* более предпочтительным признан метод *PPN*). В работах П. Зарчана, прежде всего в статье [7], выполнен глубокий, практически-ориентированный анализ, но только одного метода – *IPN*. Сравнительный анализ всех четырех перечисленных методов (*PPN*, *TPN*, *IPN*, *PPN-I*) в единой работе отсутствует.

В настоящей работе проводится сравнительная оценка кинематики<sup>1</sup> ракеты при использовании четырех названных методов (кинематический анализ) с учетом возможности их технической реализации. При этом учитываются неточность исходных данных в начале этапа самонаведения (ошибки вывода ракеты

на самонаведение) и особенности движения цели. Учет влияния помех и инерционности элементов системы самонаведения вынесены за рамки рассмотрения в интересах анализа исключительно кинематических свойств методов.

**Постановка задачи.** Необходимо выполнить сравнительный кинематический анализ четырех приведенных в различных зарубежных и отечественных источниках методов пропорциональной навигации (*PPN*, *TPN*, *IPN*, *PPN-I*) при самонаведении ЗУР на маневрирующую баллистическую цель (типа головная часть тактической баллистической ракеты) в верхних слоях стратосферы. Исходными данными для оценки методов являются известные параметры траектории цели (модель цели), высотный диапазон перехвата цели, дальность начала самонаведения ЗУР (определяется потенциалом головки самонаведения (ГСН)), а также ошибки в исходных данных на начальном этапе самонаведения ракеты на цель, обусловленные погрешностями вывода ракеты в точку начала работы ГСН и самонаведения.

Для выполнения сравнительного анализа методов необходимо выбрать и обосновать показатели качества наведения, разработать модель управляемого движения ЗУР, и, далее, оценить значения и характер изменения показателей качества наведения для разных методов в зависимости от траекторных параметров рассматриваемой цели.

Сравнительный анализ необходимо выполнить с учетом возможностей технической реализации методов.

## 1. Кинематика ракеты и исследуемые методы пропорциональной навигации

Предварительно, с целью задания математического базиса для анализа, опишем кинематику неуправляемой ракеты при абсолютном и относительном (относительно цели) движении в инерциальной системе координат (ИСК).

Прямоугольная ИСК *Oxyz* задается следующим образом: ее центр совпадает с точкой расположения радиолокатора, осуществляющего выведение ЗУР в точку начала работы ГСН для последующего самонаведения на цель, ось *Ox* направлена по линии горизонта

<sup>1</sup> Под кинематикой понимается математическое описание движения идеализированного тела с использованием законов, определяющих это движение, без рассмотрения причин движения.



в некотором выбранном направлении, ось  $Oy$  (ось высоты) направлена вверх, перпендикулярно плоскости горизонта, ось  $Oz$  дополняет систему координат до правой тройки.

ЗУР и цель рассматриваются как материальные точки. При этом с целью анализа только кинематики ЗУР, обусловленной управлением, не рассматриваются силы, определяющие движение ЗУР: тяга двигателей, гравитация и аэродинамические силы. Для цели, движущейся на заключительном участке Кеплеровой траектории, учитываются действие гравитации и лобовое сопротивление воздуха.

Траектория ЗУР в ИСК в каждый момент времени определяется радиус-вектором  $\vec{r}_p$  и вектором скорости  $\vec{V}_p$ :

$$\vec{r}_p = (x_p, y_p, z_p)^T, \vec{V}_p = \dot{\vec{r}}_p = (V_{px}, V_{py}, V_{pz})^T,$$

где  $x_p, y_p, z_p$  – координаты ЗУР в ИСК.

Вектор скорости  $\vec{V}_p$  направлен по касательной к траектории в текущей точке.

Текущая дальность до ракеты и ее скорость определяются как модули соответствующих векторов:

$$r_p = |\vec{r}_p|, V_p = |\vec{V}_p|.$$

Вектор ускорения ракеты определяется как производная по времени от вектора скорости:

$$\vec{W}_p = \dot{\vec{V}}_p = \ddot{\vec{r}}_p.$$

Вектор  $\vec{W}_p$  рассматривается как сумма тангенциальной и нормальной составляющих:

$$\vec{W}_p = \vec{W}_{p,t} + \vec{W}_{p,n}.$$

Нормальная составляющая вектора ускорения  $\vec{W}_{p,n}$  является управляющей и задается методом наведения. Влияние вектора  $\vec{W}_{p,n}$ , создаваемого по различным методам наведения, на траекторию ракеты оценивается в настоящей работе. При этом учитывается техническая возможность формирования управляющего ускорения.

Общее уравнение для вектора нормального ускорения  $\vec{W}_{p,n}$  имеет вид:

$$\vec{W}_{p,n} = \vec{\Omega}_p \times \vec{V}_p, \quad (1)$$

где  $\vec{\Omega}_p$  – вектор угловой скорости вращения вектора  $\vec{V}_p$ ;

$\times$  – знак векторного произведения.

Вектор  $\vec{\Omega}_p$  в текущей точке траектории определяется следующим образом [20]: он лежит в плоскости, перпендикулярной вектору  $\vec{V}_p$ , его модуль  $|\vec{\Omega}_p|$  равен угловой скорости вращения вектора  $\vec{V}_p$ , а направление таково, что совместно с вектором  $\vec{V}_p$  и единичным вектором нормали, направленной по радиусу кривизны траектории, он образует правую тройку.

Изменение вектора  $\vec{W}_{p,n}$  обеспечивает изменение направления полета ЗУР. Для этого применяются аэродинамические или газодинамические способы создания управляющих моментов и сил в поперечном к продольной оси ракеты направлении. Скорость ЗУР  $V_p$  (составляющая формулы (1)) не используется для управления направлением полета – понадобилось бы при наведении на маневрирующую цель как ускорять ракету, так и замедлять ее движение, что неприемлемо.

Опишем кинематику движения ракеты относительно цели. При этом траекторию цели считаем известной. Она характеризуется радиус-вектором цели  $\vec{r}_c = (x_c, y_c, z_c)^T$  и вектором скорости цели  $\vec{V}_c = (V_{cx}, V_{cy}, V_{cz})^T$ .

Введем векторы относительной дальности  $\vec{r}_{отн}$  и относительной скорости  $\vec{V}_{отн}$  цели (относительно ракеты) как разности соответствующих векторов цели и ракеты:

$$\vec{r}_{отн} = \vec{r}_c - \vec{r}_p = (x_c - x_p, y_c - y_p, z_c - z_p)^T, \\ \vec{V}_{отн} = \vec{V}_c - \vec{V}_p = (V_{cx} - V_{px}, V_{cy} - V_{py}, V_{cz} - V_{pz})^T,$$

Их абсолютные величины равны, соответственно,

$$r_{отн} = |\vec{r}_{отн}|, V_{отн} = |\vec{V}_{отн}|.$$

Для удобства описания и отображения введем вектор скорости сближения ракеты с целью

$$\vec{V}_{сбл} = -\vec{V}_{отн}, V_{сбл} = V_{отн}.$$

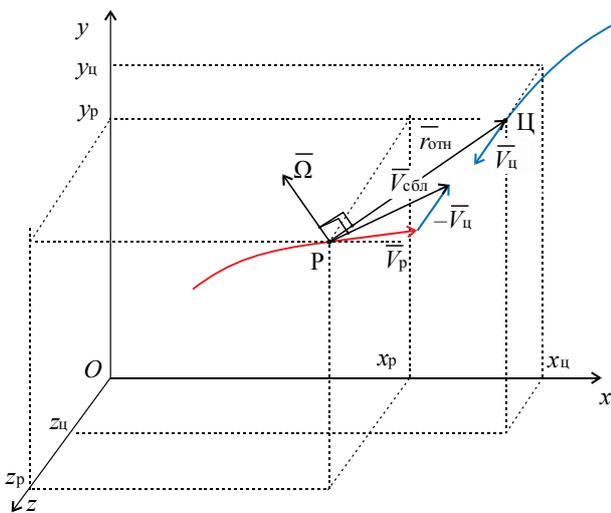
Вектор угловой скорости вращения вектора относительной дальности  $\vec{r}_{отн}$  (линии визирования ракета – цель) рассчитывается, как показано в [8], с использованием векторного произведения векторов  $\vec{r}_{отн}$  и  $\vec{V}_{отн}$  по формуле

$$\vec{\Omega} = \frac{[\vec{r}_{отн} \times \vec{V}_{отн}]}{r_{отн}^2} = \frac{[\vec{V}_{сбл} \times \vec{r}_{отн}]}{r_{отн}^2}.$$

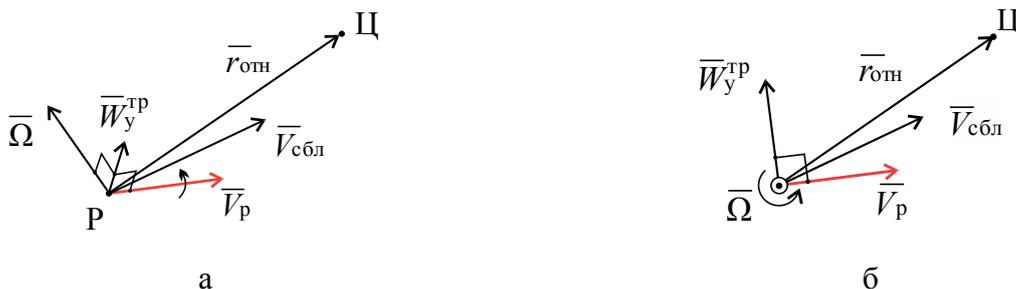
Вектор  $\bar{\Omega}$  перпендикулярен двум векторам –  $\bar{V}_{\text{сбл}}$  и  $\bar{r}_{\text{отн}}$ , его направление определяется по правилу правой руки. Поясняющая схема приведена на рисунке 1. Вектор  $\bar{\Omega}$  на практике измеряется ГСН ЗУР [21, 22].

Описание кинематики управляемой ракеты включает приведенные выше уравнения для описания относительного движения неуправляемой ракеты и уравнение для управляющего ускорения, формируемого в соответствии с одним из анализируемых методов пропорциональной навигации.

Идея пропорциональной навигации как закона наведения заключается в управлении полетом ракеты таким образом, чтобы вектор скорости ракеты  $\bar{V}_p$  поворачивался с угловой скоростью, пропорциональной угловой скорости вращения линии визирования ракета – цель и в том же направлении:



**Рис. 1.** Определение вектора угловой скорости вращения линии визирования ракета – цель. Красным цветом показана траектория ЗУР, синим – траектория цели. Точки Р и Ц – текущее положение ЗУР и цели соответственно



**Рис. 2.** Взаимосвязи векторов для метода PPN

$$\bar{\Omega}_p^{\text{TP}} = K_M \bar{\Omega}, \quad (2)$$

где  $\bar{\Omega}_p^{\text{TP}}$  – требуемый вектор угловой скорости вращения вектора скорости ракеты;  $K_M$  – коэффициент пропорциональности (коэффициент метода, навигационная постоянная),  $K_M > 1$ , на практике  $K_M = 2,5 - 8$ .

Для управления полетом ракеты по закону пропорциональной навигации (2) необходимо создавать соответствующее управляющее (нормальное) ускорение. Общая формула для расчета требуемого управляющего ускорения ракеты, формируемого по закону пропорциональной навигации, имеет вид

$$\bar{W}_y^{\text{TP}} = K_M \bar{\Omega} \times \bar{V}, \quad (3)$$

где  $\bar{V}$  – векторная величина, имеющая физический смысл скорости.

На основе рассчитанного по формуле (3) управляющего ускорения вырабатываются команды управления полетом ракеты, реализуемые газодинамическими или аэродинамическими органами управления.

Формула (3) в зависимости от способа определения вектора  $\bar{V}$  (его направления и величины) задает семейство методов пропорциональной навигации.

Дадим описание отдельных известных методов пропорциональной навигации.

**Метод PPN.** Для этого метода  $\bar{V} = \bar{V}_p$ , требуемое управляющее ускорение равно

$$\bar{W}_y^{\text{TP}} = K_M \bar{\Omega} \times \bar{V}_p. \quad (4)$$

Формируемое управляющее ускорение соответствует нормальному ускорению ЗУР (1) – оно ортогонально вектору скорости ЗУР. Взаимосвязь векторов, используемых для формирования управляющего ускорения по методу PPN, показана на рисунке 2.



На рисунке 2а (общий вид) изображено: вектор  $\vec{W}_y^{TP}$  (направлен вглубь рисунка) перпендикулярен векторам  $\vec{\Omega}$  и  $\vec{V}_p$ , обеспечивая, в соответствии с (4), поворот вектора  $\vec{V}_p$  и связанного с ним вектора  $\vec{V}_{сбл}$  в сторону вектора  $\vec{r}_{отн}$  (линии визирования ракета – цель). В итоге при совпадении направлений векторов  $\vec{V}_{сбл}$  и  $\vec{r}_{отн}$ , реализуется метод параллельного сближения.

На рисунке 2б для упрощения восприятия показан вид векторов со стороны конца вектора  $\vec{\Omega}$  (обозначен точкой в кружке). Принято, что векторы скорости  $\vec{V}_p$ ,  $\vec{V}_{сбл}$  и вектор  $\vec{r}_{отн}$  лежат в одной плоскости (в общем случае это не так) – в плоскости рисунка. Для показанного случая расположения векторов  $\vec{V}_p$ ,  $\vec{V}_{сбл}$  и  $\vec{r}_{отн}$  вектор угловой скорости  $\vec{\Omega}$  направлен перпендикулярно плоскости рисунка в сторону наблюдателя, круговой стрелкой показано направление вращения вектора  $\vec{V}_p$  (и связанного с ним вектора  $\vec{V}_{сбл}$ ) относительно вектора  $\vec{\Omega}$ .

На практике вектор  $\vec{V}_p$ , используемый в методе, может быть измерен бортовой инерциальной системой наведения (ИНС) ракеты.

**Метод TPN.** Для этого метода  $\vec{V} = V_p \vec{l}_r$ , где  $\vec{l}_r$  – единичный вектор относительной дальности цели. Требуемое управляющее ускорение равно

$$\vec{W}_y^{TP} = K_M V_p \vec{\Omega} \times \vec{l}_r = K_M \frac{V_p}{r_{отн}} \vec{\Omega} \times \vec{r}_{отн}.$$

и формируется ортогонально линии визирования ракета – цель (рис. 3). Требуемое управляющее ускорение метода TPN в общем случае не ортогонально вектору скорости ЗУР.

На практике единичный вектор  $\vec{l}_r$  (направление на цель) измеряется следящей угловой системой ГСН.

**Метод IPN.** Для этого метода  $\vec{V} = \vec{V}_{сбл}$ . Требуемое управляющее ускорение равно

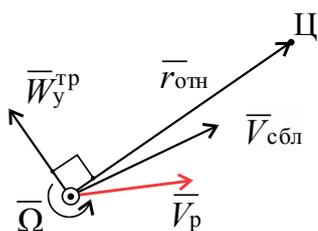


Рис. 3. Взаимосвязи векторов для метода TPN

и формируется ортогонально вектору скорости сближения ракеты с целью (рис. 4). Требуемое управляющее ускорение в общем случае не ортогонально вектору скорости ЗУР.

Не имеется технических способов измерения вектора  $\vec{V}_{сбл}$ . На практике на борту ЗУР он может быть рассчитан по данным ИНС о векторе скорости ракеты и результатам траекторной обработки измерений, выполняемых доплеровской ГСН. В оптической ГСН техническая реализация измерения относительной скорости цели затруднена (необходимо использовать активный лазерный канал).

**Метод PPN-I.** Для этого метода  $\vec{V} = V_{отн} \vec{l}_{Vp}$ , где  $\vec{l}_{Vp}$  – единичный вектор скорости ракеты. Требуемое управляющее ускорение равно

$$\vec{W}_y^{TP} = K_M V_{отн} \vec{\Omega} \times \vec{l}_{Vp} = K_M \frac{V_{сбл}}{V_p} \vec{\Omega} \times \vec{V}_p.$$

Оно направлено ортогонально вектору скорости ракеты, как в методе PPN (рис. 2), но, в отличие от этого метода, пропорционально величине относительной скорости цели  $V_{сбл}$ , как в методе IPN. Техническая реализация метода, как и метода IPN, в общем случае требует траекторных расчетов по данным доплеровской радиолокационной ГСН. В частном случае в качестве оценки параметра  $V_{сбл}$  может использоваться значение скорости изменения относительной дальности  $\dot{r}_{отн}$ , получаемое доплеровским приемником ГСН.

Как видно из приведенных описаний, в методах PPN и PPN-I формируемое управляющее ускорение ортогонально вектору скорости ракеты, что обеспечивает «чистое» управление ракетой в смысле соотношения (1), то есть управляющее воздействие изменяет

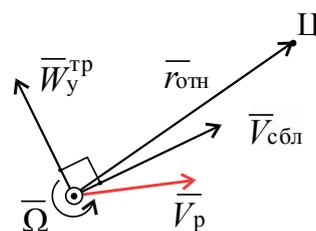


Рис. 4. Взаимосвязи векторов для метода IPN



направление вектора скорости ЗУР, не требуя изменения его величины.

В методах *TPN* и *IPN* управляющее ускорение в общем случае не ортогонально вектору скорости ракеты  $\bar{V}_p$ . Реализация требуемого управляющего ускорения вследствие этого предполагает изменение как направления скорости ракеты, так и ее абсолютной величины, то есть необходимо управлять работой двигателя ракеты, причем в некоторых случаях тормозить ракету. Ясно, что в чистом виде методы *TPN* и *IPN* не реализуемы. Реализация этих методов без управления скоростью ракеты приводит к изменению их свойств. Ниже исследуются свойства этих методов без управления скоростью ракеты.

Анализ уравнений четырех исследуемых методов показывает, что, при их общности, для каждого из них свойственна своя техническая реализация.

Общность технической реализации методов определяется тем, что во всех случаях для измерения вектора угловой скорости линии визирования ракета – цель  $\bar{\Omega}$  используется ГСН (радиолокационная или оптическая). Она же, сопровождая цель, измеряет относительное направление на цель, то есть измеряет вектор  $\bar{l}_r$ , необходимый в методе *TPN*. Общей является также необходимость использования ИНС для измерения вектора скорости ракеты  $\bar{V}_p$  (для использования его в качестве множителя в уравнении метода или для вычисления вектора  $\bar{V}_{сбл}$ ).

Особенности технической реализации методов определяются возможностью использования ГСН определенного типа.

Сопоставительные данные по рассмотренным методам с учетом возможности их технической реализации сведены в таблицу 1.

Отметим, что помимо четырех рассматриваемых методов возможны и другие варианты реализации закона пропорциональной навигации (2). Так, работоспособным является аналог метода *IPN*, в котором вместо вектора  $\bar{V}_{сбл}$  используется скаляр  $V_{сбл}$ :

$$\bar{W}_y^{TP} = K_m \bar{\Omega} \times V_{сбл}$$

Однако качество такого метода, как показывает анализ, ниже, чем у метода *IPN*.

Метод этого вида использовался в системах наведения ракет 60-х годов прошлого века. При этом взамен величины  $V_{сбл}$  использовалось оценочное значение скорости изменения относительной дальности  $\dot{r}_{отн}$  на момент встречи ракеты с целью, которое рассчитывалось по результатам прогнозных траекторных оценок движения ракеты и цели и поступало в бортовой вычислитель команд управления ракеты перед ее стартом. Использование приведенного метода можно объяснить недостаточным развитием технологий 1950-х годов и отсутствием элементной базы для построения бортовых измерителей вектора скорости ракеты  $\bar{V}_p$ . Недостатки системы наведения ракеты компенсировались повышением мощности боевой части, что гарантировало поражение цели.

## 2. Показатели качества наведения

Для оценки качества наведения выберем следующие показатели: величину нормальных ускорений, мгновенный промах и характеристическую управляющую скорость ракеты.

*Нормальные ускорения*  $W_{p,n}$ , вырабатываемые с учетом возможности технической реализации метода наведения, характеризуют маневренные возможности ракеты, потребные для компенсации начальных ошибок

Таблица 1

Методы пропорциональной навигации и возможность их реализации с использованием различных типов ГСН

Метод	В качестве величины $\bar{V}$ используется:	Направление управляющего ускорения $\bar{W}_y^{TP}$ ортогонально вектору скорости $\bar{V}_p$ ?	Метод реализуется с использованием ГСН:	
			оптической	радиолокационной
<i>PPN</i>	$\bar{V}_p$	Да (рис. 2)	+	+
<i>TPN</i>	$V_p \bar{l}_r$	Нет (рис. 3)	+	+
<i>IPN</i>	$\bar{V}_{сбл}$	Нет (рис. 4)	-	+
<i>PPN-I</i>	$V_{сбл} \bar{l}_{Vp}$	Да (рис. 2)	-	+



наведения ракеты (на момент начала самонаведения), а также для парирования маневра цели, и определяют характеристики органов управления полетом ракеты. При использовании для управления полетом ракеты двигателей поперечного управления (ДПУ) величина  $W_{p.n}$  характеризует требуемое значение импульса тяги ДПУ. При аэродинамическом способе управления параметр  $W_{p.n}$  характеризует требования к аэродинамике корпуса ракеты и эффективности ее аэродинамических рулей.

Величина  $W_{p.n}$  определяется величиной требуемого управляющих ускорения  $\bar{W}_y^{тp}$  и рассчитывается по результатам моделирования с учетом отсутствия управления абсолютной скоростью ракеты.

Более предпочтительным будет тот метод наведения, для реализации которого требуются меньшие управляющие ускорения (при прочих равных).

*Мгновенный промах* характеризует точность наведения ракеты на цель. Мгновенный промах  $\bar{h}$  представляет собой проекцию вектора относительной дальности  $\bar{r}_{отн}$  на плоскость, перпендикулярную вектору  $\bar{V}_{сбл}$  (см. рисунок 5).

При наведении ракеты на цель по методу параллельного сближения и равномерном и прямолинейном полете цели и ракеты мгновенный промах на протяжении всего времени движения ракеты равен нулю (направления векторов  $\bar{V}_{сбл}$  и  $\bar{r}_{отн}$  совпадают). При использовании для наведения ракеты на маневрирующую цель закона пропорциональной навигации мгновенный промах равен нулю, как правило, в конце наведения.

Основные соотношения для вычисления мгновенного промаха и параметров, связанных с ним, приведены ниже.

Мгновенный промах определяется как разность векторов:

$$\bar{h} = \bar{r}_{отн} - \tau_{п} \bar{V}_{сбл},$$

где  $\tau_{п}$  – время полета, оставшееся до встречи ракеты с целью при их дальнейшем равномерном и прямолинейном движении.

Фазу мгновенного промаха определим как угол между векторами  $\bar{V}_{сбл}$  и  $\bar{r}_{отн}$ :

$$\varphi_h = \arccos \frac{\bar{r}_{отн} \bar{V}_{сбл}}{r_{отн} V_{сбл}}.$$

Большое значение показателя  $\varphi_h$  в конце наведения свидетельствует о низкой эффективности метода наведения: с учетом наличия задержек в контуре самонаведения при обработке команд управления, ракета пролетит мимо цели. Напротив, нулевая фаза является индикатором того, что сигнал ошибки в контуре самонаведения равен нулю ( $\bar{\Omega} = 0$ ), то есть реализуется наведение по методу параллельного сближения. В целом показатель  $\varphi_h$  позволяет судить о динамике сближения векторов  $\bar{V}_{сбл}$  и  $\bar{r}_{отн}$  при движении ракеты к цели.

Величина мгновенного промаха равна

$$h = |\bar{h}| = r_{отн} \sin \varphi_h.$$

Скорость изменения относительной дальности до цели равна

$$\dot{r}_{отн} = V_{сбл} \cos \varphi_h = \frac{\bar{r}_{отн} \bar{V}_{сбл}}{r_{отн}} = \bar{r} \bar{V}_{сбл}.$$

Оставшееся время полета  $\tau_{п}$  (в предположении равномерного и прямолинейного движения ракеты и цели) равно

$$\tau_{п} = \frac{r_{отн}}{\dot{r}_{отн}} = \frac{r_{отн}^2}{\bar{r}_{отн} \bar{V}_{сбл}}.$$

*Характеристическая управляющая скорость ракеты* представляет собой интеграл по времени полета ракеты от функции  $W_{p.n}(t)$ :

$$V_{хар.упр} = \int_0^{\tau_{п}} W_{p.n}(t) dt,$$

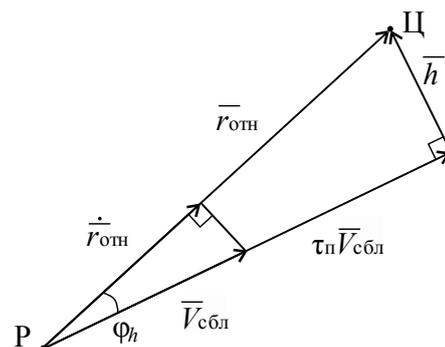


Рис. 5. Определение текущего промаха



где  $t_n$  – продолжительность полета на участке самонаведения.

Этот показатель численно равен величине добавочной скорости, которую приобрела бы ракета под действием только управляющей силы и при отсутствии прочих сил.

Данный показатель позволяет оценивать затрачиваемые ресурсы двигателей (разгонного и/или ДПУ) для управления полетом ракеты. При аэродинамическом способе управления показатель  $V_{\text{хар.упр}}$  характеризует степень снижения скорости ракеты из-за потерь, связанных с созданием требуемой подъемной силы. При управлении полетом с помощью ДПУ показатель  $V_{\text{хар.упр}}$  определяет потребный запас топлива ДПУ и, косвенно, массу ракеты.

Ясно, что чем меньше показатели  $h$  и  $V_{\text{хар.упр}}$  в конце наведения, тем лучше метод наведения.

### 3. Оценка методов при наведении на баллистическую цель

#### 3.1. Модель движения баллистической цели

Моделируется движение головной части тактической баллистической ракеты на заключительном участке траектории в верхних слоях стратосферы. При построении траектории цели учитываются наиболее значимые факторы: гравитация и лобовое сопротивление воздуха (действие которых воспринимается как маневрирование цели, главным образом вдоль продольной оси), а также маневр цели в поперечном направлении.

Начало траектории цели задается точкой  $\bar{r}_{ц0} = (x_{ц0}, y_{ц0}, z_{ц0})^T$  и вектором скорости в ней  $\bar{V}_{ц0} = (V_{цx0}, V_{цy0}, V_{цz0})^T$ .

Действие гравитации задается вектором ускорения свободного падения  $\bar{g}_0$ . Величина ускорения свободного падения принимается равной  $g_0 = 9,81 \text{ м/с}^2$ , а направление – противоположно направлению оси  $Oy$  ИСК.

Величина лобового сопротивления цели  $X_{л.ц}$  вычисляется по известной в аэродинамике формуле [11, 23, 24]:

$$X_{л.ц} = c_x q S,$$

где  $q = \rho V_{ц}^2 / 2$  – скоростной напор набегающего потока воздуха;

$\rho$  – плотность воздуха в данной точке траектории;

$S$  – площадь мишени цели;

$c_x$  – безразмерный аэродинамический коэффициент.

Вектор силы лобового сопротивления направлен противоположно вектору скорости  $\bar{V}_{ц}$ . Ускорение, создаваемое силой лобового сопротивления, равно  $\bar{X}_{л.ц} / m_{ц}$ , где  $m_{ц}$  – масса цели. Величины  $c_x$  и  $\rho$  зависят, соответственно, от скорости и высоты.

Маневр цели задается вектором ускорений

$$\bar{W}_{цм} = (W_{цмx}, W_{цмы}, W_{цмz})^T,$$

являющимся функцией времени.

Система дифференциальных уравнений, описывающих движение цели, имеет вид:

$$\begin{cases} \dot{\bar{V}}_{ц} = \bar{W}_{цм} - \bar{g}_0 - \frac{\bar{X}_{л.ц}}{m_{ц}}, \\ \dot{\bar{r}}_{ц} = \bar{V}_{ц}. \end{cases}$$

Интегрирование данной системы по времени при заданных исходных данных  $\bar{r}_{ц0}, \bar{V}_{ц0}$  и известных функциях  $c_x(V_{ц}), \rho(y_{ц})$  и  $\bar{W}_{цм}(t)$  дает траекторию цели  $\bar{r}_{ц}(t)$  и ее скорость  $\bar{V}_{ц}(t)$ .

#### 3.2. Определение направления вывода ракеты

Примем, что ракета выводится с начальной (опорной) траектории на участок самонаведения на цель таким образом, чтобы вектор скорости ракеты был направлен в упрежденную точку встречи, рассчитанную исходя из предположения о равномерном движении ракеты и цели, что позволяет реализовать метод параллельного сближения. В связи с неточностью определения координат цели и ракеты радиолокатором, поддерживающим инерциальное управление полетом ракеты до начала самонаведения, и ошибками ИНС, определяющей положение ракеты, вывод ракеты осуществляется с некоторой угловой ошибкой  $\Delta\alpha$ , вследствие чего существует начальный мгновенный промах. Величина угловой ошибки вывода ракеты, как показано в статье [25], зависит от взаимной ориентации радиус-векторов ракеты и цели и точностных характеристик радиолокатора и ИНС и может быть оценена



по полученным в статье формулам. В процессе самонаведения ЗУР на цель угловая ошибка вывода ракеты отрабатывается используемым методом самонаведения.

Рассчитаем направление в упрежденную точку встречи из точки начала самонаведения, относительно которого в последующем, задавая угловые ошибки вывода ракеты, будем оценивать качество их отработки при использовании различных методов наведения.

Для упрощения выкладок и большей наглядности положим, что цель и ракета в начале самонаведения находятся в одной плоскости  $Oxy$ , то есть начальные координаты по оси  $Oz$  равны  $z_{ц0} = 0, z_{p0} = 0, V_{цz0} = 0$ . Такое предположение не означает перехода к моделированию в одной плоскости, так как в последующем, за счет ненулевой составляющей ускорения маневра  $W_{цмz}$ , движение цели и ракеты приобретает трехмерный характер в системе координат  $Oxyz$ .

На рисунке 6 показан треугольник сближения «ракета (Р) – цель (Ц) – точка встречи (ТВ)», в котором находятся ракета и цель при их равномерном и прямолинейном движении. Стороны треугольника имеют величины  $r_{отп}, r_{p-тв}, r_{ц-тв}$ . Углы напротив этих сторон обозначены, соответственно,  $\gamma, \beta, \alpha$ .

Известными данными для моделирования являются:

- угол  $\alpha_{ц0}$ , характеризующий наклон траектории цели относительно плоскости горизонта в начальной точке (задается вектором  $\bar{V}_{ц0}$ );

- начальные координаты ракеты и цели, то есть радиус-векторы  $\bar{r}_{ц0}$  и  $\bar{r}_{p0}$ .

Необходимо рассчитать угол  $\alpha_{p0}$ , характеризующий направление вектора скорости ракеты  $\bar{V}_{p0}$  в начале самонаведения в упрежденную точку встречи, относительно которого будет задаваться угловая ошибка вывода  $\Delta\alpha$ .

Используя теорему синусов, запишем равенство

$$\frac{r_{ц-тв}}{\sin\alpha} = \frac{r_{p-тв}}{\sin\beta},$$

откуда

$$\sin\alpha = \frac{r_{ц-тв}}{r_{p-тв}} \sin\beta = \frac{t_{п} V_{ц0}}{t_{п} V_{p0}} \sin\beta = \frac{V_{ц0}}{V_{p0}} \sin\beta,$$

где  $t_{п}$  – время полета цели до перехвата ракетой;  $\beta = \alpha_{p-ц} - \alpha_{ц0}$ .

Угол  $\alpha_{p0}$  рассчитывается как сумма

$$\alpha_{p0} = \alpha + \alpha_{p-ц}, \tag{5}$$

где  $\alpha = \arcsin\left(\frac{V_{ц0}}{V_{p0}} \sin\beta\right), \alpha_{p-ц} = \arctg\left(\frac{y_{ц0} - y_{p0}}{x_{ц0} - x_{p0}}\right)$ .

Одновременно из треугольника сближения найдем время  $t_{п}$ , оставшееся до встречи, при равномерном и прямолинейном движении ракеты и цели. Это позволит задавать время моделирования перехвата цели при использовании различных методов наведения. С учетом маневрирования цели оно будет не меньше времени  $t_{п}$ .

По теореме косинусов

$$r_{отп}^2 = r_{p-тв}^2 + r_{ц-тв}^2 - 2r_{p-тв} r_{ц-тв} \cos\gamma,$$

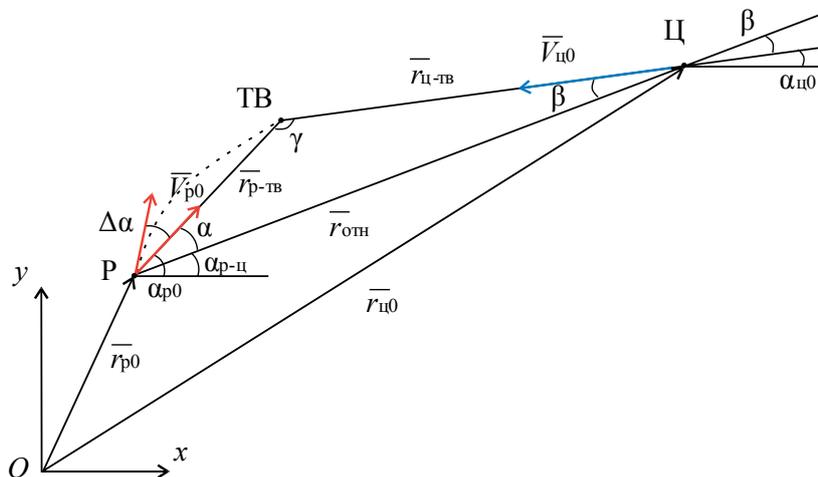


Рис. 6. Схема сближения ракеты и цели



где  $\gamma = \pi - (\alpha + \beta)$ .

С учетом того, что  $r_{ц-ТВ} = t_{п} V_{ц0}$  и  $r_{р-ТВ} = t_{п} V_{р0}$ , получаем уравнение

$$r_{отн}^2 = t_{п}^2 (V_{р0}^2 + V_{ц0}^2 - 2V_{р0} V_{ц0} \cos \gamma),$$

откуда

$$t_{п} = \sqrt{\frac{r_{отн}^2}{V_{р0}^2 + V_{ц0}^2 - 2V_{р0} V_{ц0} \cos \gamma}}. \quad (6)$$

### 3.3. Моделирование движения ЗУР при наведении на цель

Начало траектории ракеты задается точкой  $\bar{r}_{р0} = (x_{р0}, y_{р0}, z_{р0})^T$ , в которую выведена ракета для последующего самонаведения на цель, и вектором скорости в ней  $\bar{V}_{р0} = (V_{рx0}, V_{рy0}, V_{рz0})^T$ .

Начальное направление вектора скорости  $\alpha_{р0}$  определяется по формуле (5) и с учетом угловой ошибки вывода  $\Delta\alpha$ , рассчитываемой по формулам, приведенным в статье [25].

С целью выполнения сравнительного кинематического анализа методов наведения принимаем, что на ракету не действует никаких других сил, кроме управляющих ускорений. Начиная с точки вывода ракета наводится на движущуюся цель по одному из методов пропорциональной навигации, описываемых формулами расчета требуемых управляющих ускорений  $\bar{W}_y^{TP}$ .

Система дифференциальных уравнений, описывающих управляемое движение ракеты к цели, имеет вид:

$$\begin{cases} \dot{\bar{V}}_{ц} = \bar{W}_{цм} - \bar{g}_0 - \frac{\bar{X}_{л}}{m_{ц}}, \\ \dot{\bar{r}}_{ц} = \bar{V}_{ц}, \\ \dot{\bar{V}}_{р} = \bar{W}_y^{TP}, \\ \dot{\bar{r}}_{р} = \bar{V}_{р}. \end{cases}$$

При описании в п. 1 существа методов наведения было показано, что реализация методов *TPN* и *IPN* в общем случае требует изменения скорости ракеты. В связи с тем, что в современных ЗУР отсутствует управление скоростью ракеты, при моделировании необходимо устранить влияние управляющего ускорения на скорость ракеты. С этой целью для методов *TPN* и *IPN* при вычислении координат ракеты

(четвертое уравнение системы уравнений) используем нормировку скорости ракеты в виде:

$$\dot{\bar{r}}_{р} = \bar{V}_{р} \frac{V_{р0}}{|\bar{V}_{р}|}. \quad (7)$$

Полученная система уравнений, дополненная функциями  $c_x(V_{ц})$ ,  $\rho(y_{ц})$  и  $\bar{W}_{цм}(t)$  для вычисления входящих в ее состав переменных, является замкнутой. При известных исходных данных  $\bar{r}_{ц0}$ ,  $\bar{V}_{ц0}$ ,  $\bar{r}_{р0}$ ,  $\bar{V}_{р0}$  она дает траектории ракеты  $\bar{r}_{р}(t)$  и цели  $\bar{r}_{ц}(t)$  и их скорости  $\bar{V}_{р}(t)$ ,  $\bar{V}_{ц}(t)$ .

Решение системы уравнений (моделирование движения) осуществляется численными методами в координатной форме в ИСК *Охуз*.

Время моделирования  $t_m$  задается исходя из неравенства  $t_m \geq t_{п}$ , где величина  $t_{п}$  рассчитывается по формуле (6). Интервал моделирования равен  $\Delta t = t_m/n$ , где  $n$  – количество шагов моделирования.

Результатом моделирования для ракеты в дискретные моменты времени являются значения ее радиус-вектора  $\bar{r}_{pi}$  и скорости  $\bar{V}_{pi}$ , где  $i = 0, \dots, n-1$ . Отметим, что для методов *TPN* и *IPN* ввиду нормировки (7) значения вектора скорости должны определяться по формуле

$$\bar{V}_{pi} = \frac{\bar{r}_{pi} - \bar{r}_{pi-1}}{\Delta t}.$$

С использованием полученных значений  $\bar{r}_{pi}$  и  $\bar{V}_{pi}$  вычисляются текущие значения:

- величины скорости  $V_{pi} = |\bar{V}_{pi}|$ ;
- вектора ускорений  $\bar{W}_{pi} = \frac{\bar{V}_{pi} - \bar{V}_{pi-1}}{\Delta t}$ ;
- вектора тангенциального ускорения  $\bar{W}_{р,ti} = \frac{V_{pi} - V_{pi-1}}{\Delta t} \bar{V}_{pi}^0$ , где  $\bar{V}_{pi}^0 = \frac{\bar{V}_{pi}}{V_{pi}}$ ;
- вектора нормального ускорения  $\bar{W}_{р,ni} = \bar{W}_{pi} - \bar{W}_{р,ti}$ , или  $\bar{W}_{р,ni} = V_{pi} \frac{\bar{V}_{pi}^0 - \bar{V}_{pi-1}^0}{\Delta t}$ .

Аналогичные вычисления выполняются для цели.

### 3.4. Оценка качества наведения ракеты

Оценку качества наведения ракеты при использовании различных методов наведения выполним, опираясь на следующие исходные данные.



Цель имеет начальные координаты:  $\vec{r}_{ц0} = (30\ 000, 60\ 000, 0)^T$  (в метрах). Скорость цели в начальной точке равна  $V_{ц0} = 3000$  м/с, угол наклона траектории  $\alpha_{ц0} = 30^\circ$ .

Начальные параметры ракеты равны:  $\vec{r}_{p0} = (0, 35\ 000, 0)^T$  (в метрах),  $V_{p0} = 2500$  м/с.

Начальный угол наклона вектора скорости ракеты и время полета ракеты, рассчитанные, соответственно, по формулам (5), (6), равны  $\alpha_{p0} = 51,598^\circ$ ,  $t_{п} = 7,227$  с.

Коэффициент метода принимается равным  $K_m = 5$ .

### А. Скорость ракеты постоянна

Ввиду принятого предположения об отсутствии действия на ракету сил (кроме управляющих), скорость ракеты в процессе наведения на цель остается неизменной, равной начальной скорости  $V_{p0}$ .

Для сравнительного анализа вначале выполним расчеты для случая, когда на цель также не действуют никакие силы ( $\vec{g}_0 = 0, \vec{X}_{л.ц} = 0$ ). Моделирование полета цели и ракеты при наведении по разным методам в этом случае дает траектории, приведенные на рисунке 7.

В рассматриваемом случае наведение для всех методов свелось к методу параллельного сближения. Все методы дают

одинаковые результаты (траектории полета ракеты по разным методам наведения на рисунке 7 совпали и накрыты красной траекторией метода *PPN*). Перехват цели происходит в точке с координатами  $(11\ 212, 49\ 145, 0)^T$ . На протяжении всего полета нормальные ускорения  $W_{p,н}$ , мгновенный промах  $\bar{h}$  и характеристическая управляющая скорость  $V_{хар,упр}$  равны нулю.

При тех же условиях введем начальную угловую ошибку вывода ракеты, равную  $1^\circ$ , при этом  $\alpha_{p0} = 52,598^\circ$ . Графики показателей качества наведения для этого случая приведены на рисунке 8.

Для этих условий начальный промах составляет 300 м. Для его отработки для разных методов требуются ускорения на интервале самонаведения порядка  $0,2-3,5 g_0$ , в конце – до  $14,5 g_0$ . Величина характеристической управляющей скорости в конце наведения при этом составляет  $63-87$  м/с.

Из графиков видно, что методы, использующие в качестве параметра для вычисления управляющих ускорений относительную скорость сближения  $V_{сбл}$  (методы *IPN* и *PPN-I*), обрабатывают начальную ошибку значительно быстрее, чем методы *PPN* и *TPN*,

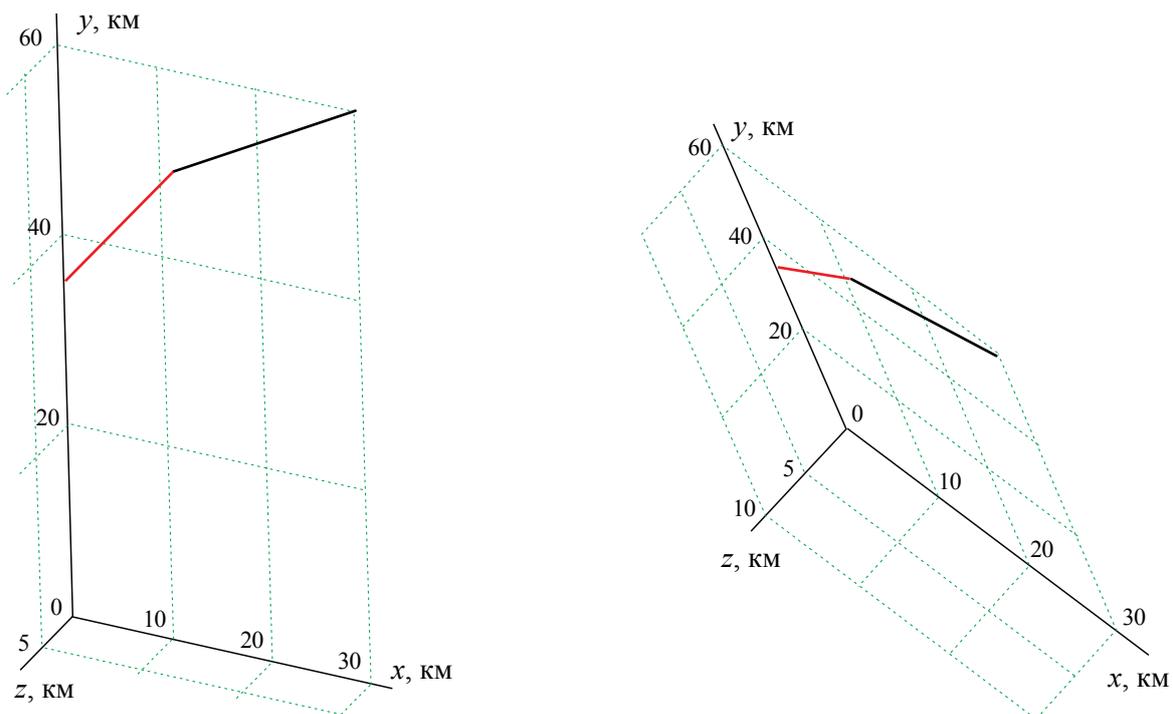
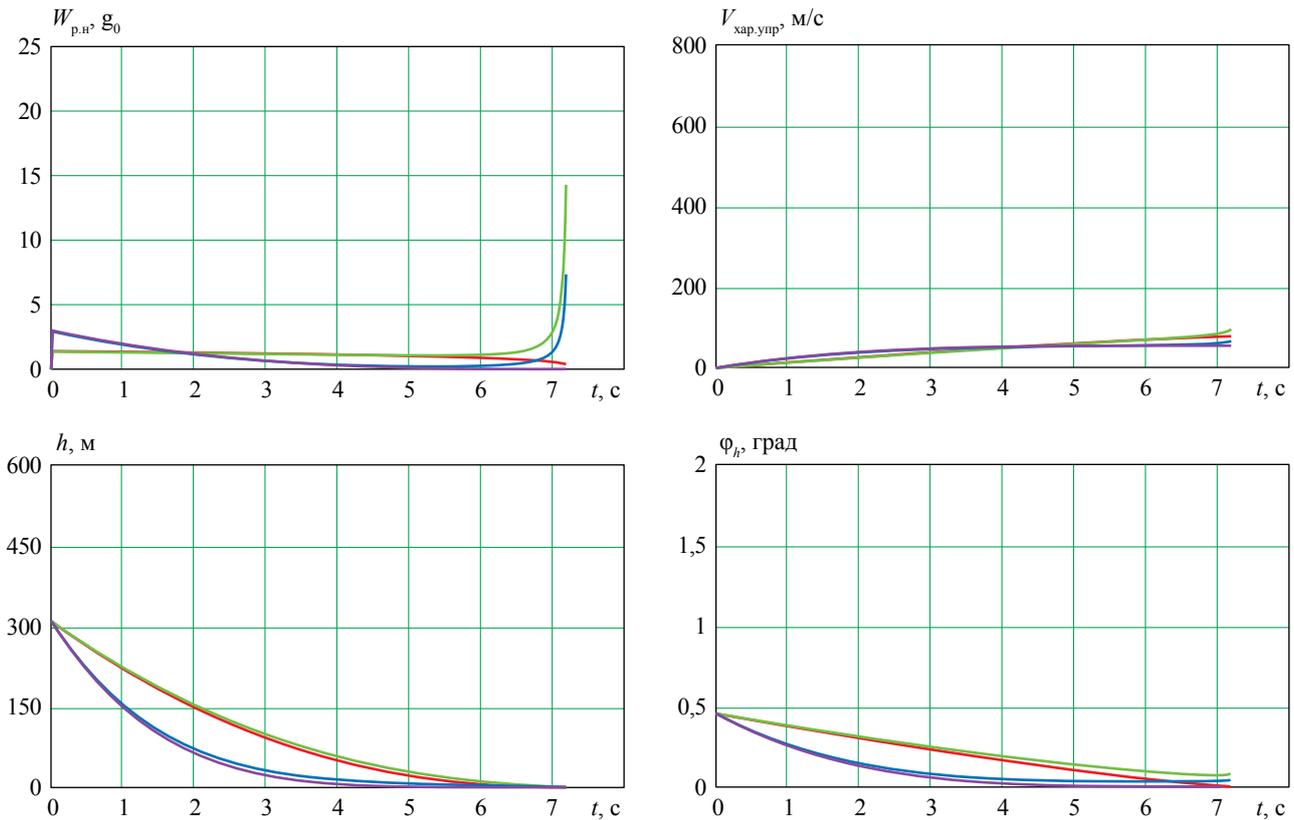


Рис. 7. Траектории цели (—) и ракеты (—) (разные ракурсы отображения ИСК) при отсутствии сил тяжести и лобового сопротивления



**Рис. 8.** Отработка начальной угловой ошибки  $1^\circ$  (без учета гравитации и лобового сопротивления воздуха).  
Графики показателей качества  $W_{p.n.}$ ,  $h$ ,  $V_{xar.upr}$ ,  $\phi_h$  в процессе наведения ракеты на цель по разным методам:  
—  $PPN$ , —  $TPN$ , —  $IPN$ , —  $PPN-I$

не учитывающие ее. Метод  $PPN-I$ , имеющий наилучшие результаты по скорости отработки начальной ошибки, при этом не требует больших управляющих ускорений и высокой характеристической управляющей скорости. В методах  $TPN$ ,  $IPN$ , в которых вектор управляющего ускорения в отличие от  $PPN$  и  $PPN-I$  формируется не ортогонально вектору скорости ракеты, требуемое управляющее ускорение вблизи цели (за 0,5 с до точки встречи) интенсивно возрастает (в случае отсутствия нормировки скорости (7) этого роста нет, однако в этом случае необходимо управлять абсолютной скоростью ракеты).

Далее, приняв начальную угловую ошибку вывода ракеты равной  $3^\circ$  (начальный промах равен 925 м), получаем, что требуемые ускорения для отработки промаха на интервале самонаведения возрастают до 4,1–8,6  $g_0$ , характеристическая управляющая скорость – до 164–270 м/с, при этом соотношения показателей, показанные на рисунке 8, для разных методов сохраняются.

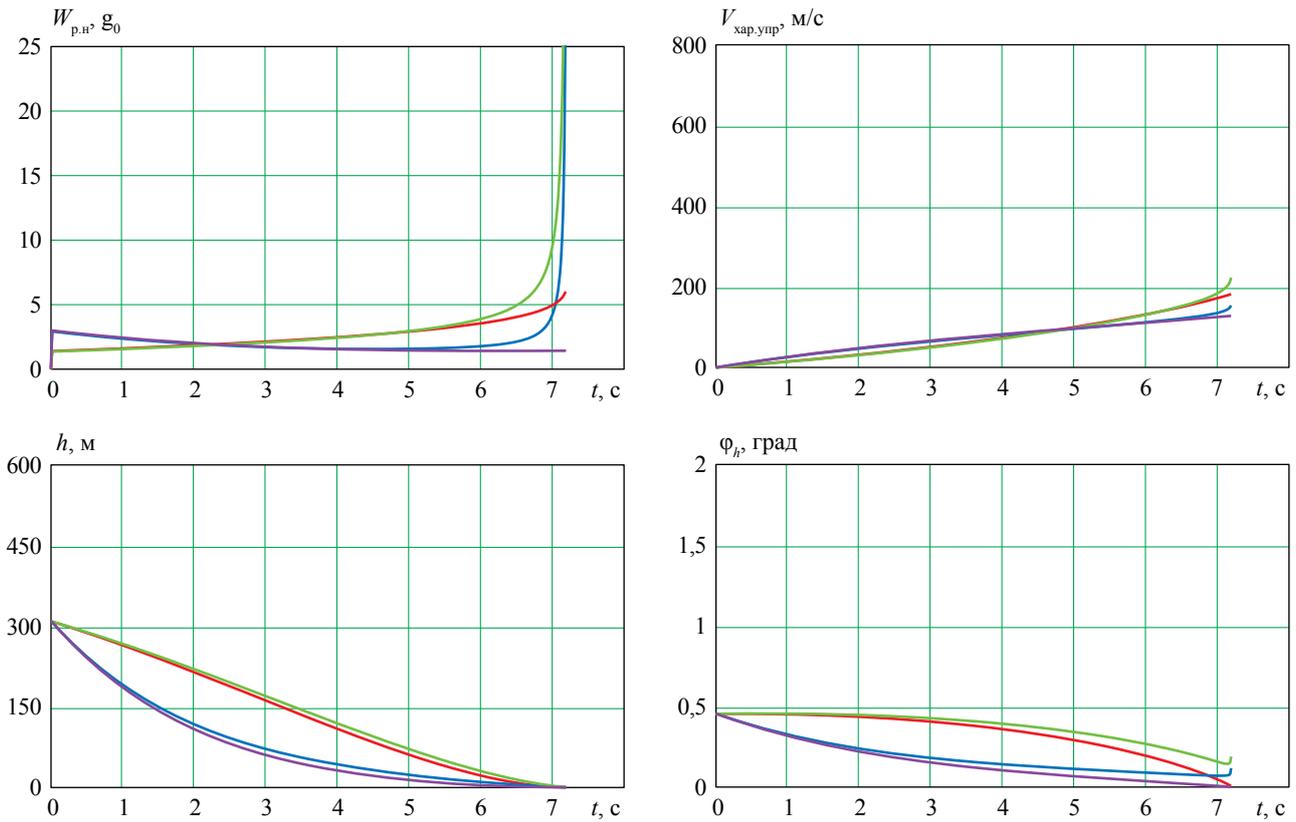
Учтем действие на цель сил гравитации и лобового сопротивления воздуха. Графики показателей качества для этого случая, при начальной угловой ошибке равной  $1^\circ$ , приведены на рисунке 9.

При том что показатели качества, показанные на рисунке 8, ухудшились в среднем в 1,5–2 раза, тенденции их изменения и соотношения между ними сохранились.

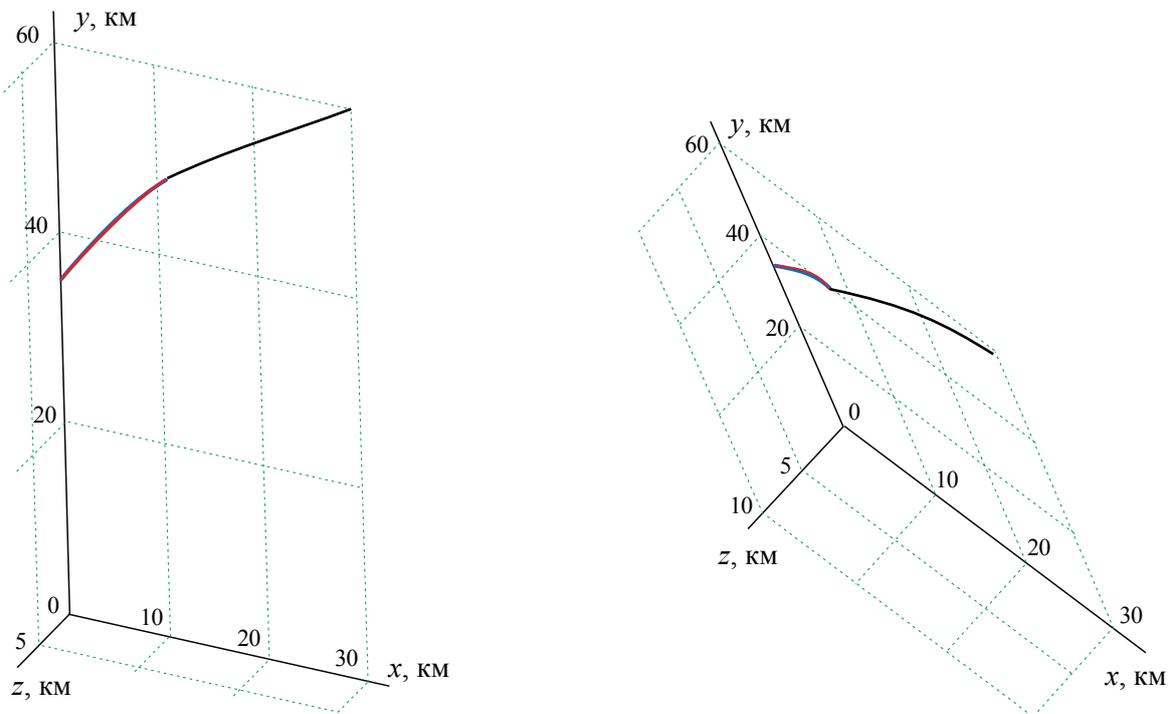
Далее дополнительно введем боковой маневр цели с ускорением  $6g_0$  в направлении оси  $Oz$ . Траектории цели и ракет, наводимых по разным методам, для этого случая приведены на рисунке 10, графики показателей качества – на рисунке 11.

Как следует из приведенных графиков, тенденции показателей и соотношения между ними сохраняются.

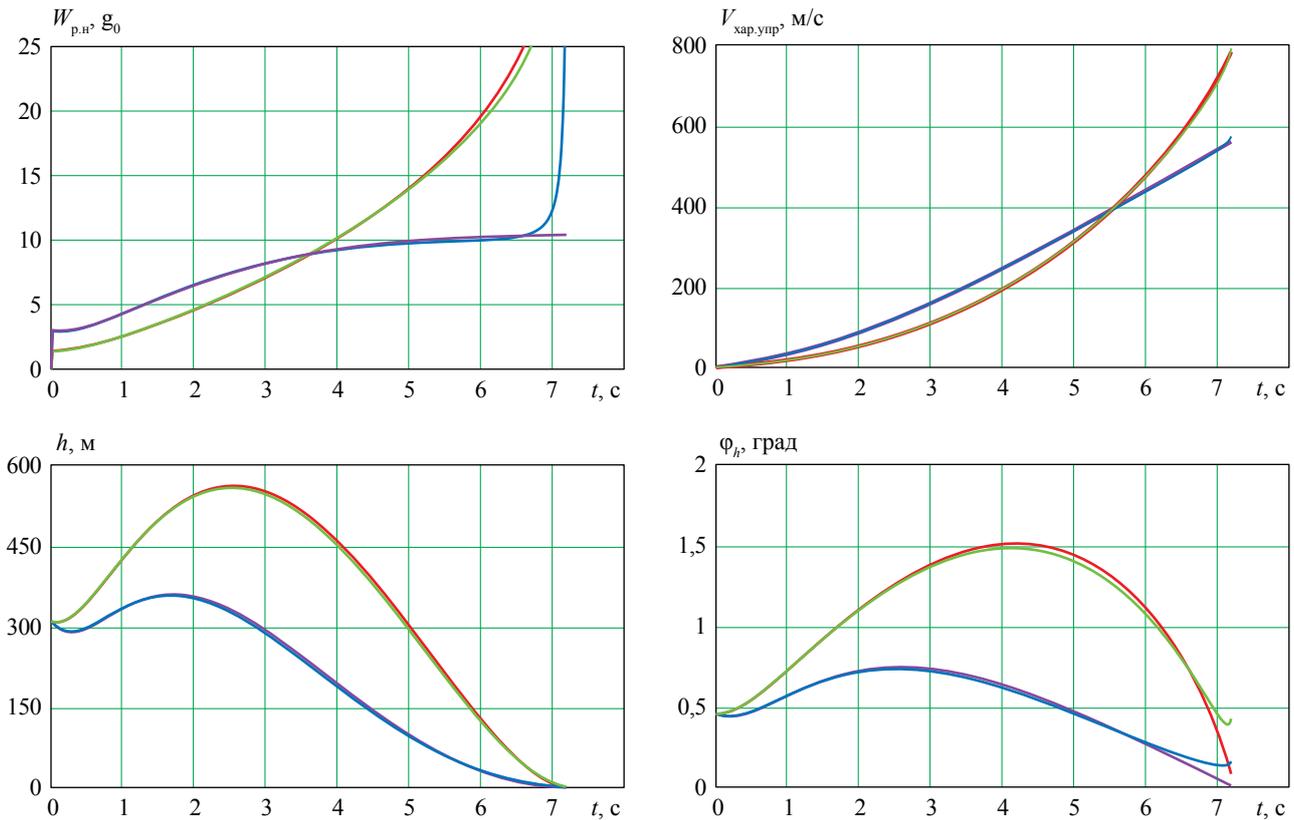
Для управления полетом (прежде всего для отработки поперечного ускорения цели ( $6g_0$ )) для разных методов потребны управляющие ускорения до 10–30  $g_0$ , а величина характеристической управляющей скорости



**Рис. 9.** Графики показателей качества при отработке начальной угловой ошибки  $1^\circ$  с учетом действия на цель сил гравитации и лобового сопротивления воздуха, цель не маневрирует  
 — PPN, — TPN, — IPN, — PPN-I



**Рис. 10.** Траектории цели (—) и ракеты (—, —, —, —) при отработке начальной угловой ошибки  $1^\circ$ , действии на цель сил гравитации и лобового сопротивления и боковом маневре цели с ускорением  $6g_0$  на интервале самонаведения



**Рис. 11.** Графики показателей качества при тех же условиях, что на рисунке 10  
— – PPN, — – TPN, — – IPN, — – PPN-I

в конце наведения возрастает до 570–800 м/с. Так как для рассматриваемых высот перехвата цели аэродинамическое управление полетом невозможно, то двигатели поперечного управления для обеспечения полученных значений показателей  $W_{p.n}$  и  $V_{xar.yupr}$  должны иметь достаточно высокие тяговые показатели и сохранять их в течение всего времени наведения. Ориентировочный расчет показателей ДПУ и запаса топлива может быть выполнен по методике, приведенной в статье [26].

### Б. Переменная скорость ракеты

Оценим свойства методов вне рамок кинематического анализа, с учетом действия на ракету сил гравитации и лобового сопротивления воздуха.

С этой целью модифицируем систему дифференциальных уравнений, описывающих управляемое движение ракеты к цели, – третье уравнение запишем в виде

$$\dot{V}_p = \overline{W}_y^{TP} - \overline{g}_0 - \frac{\overline{X}_{л.p}}{m_p},$$

где  $\overline{X}_{л.p}$  – вектор силы лобового сопротивления для ракеты;

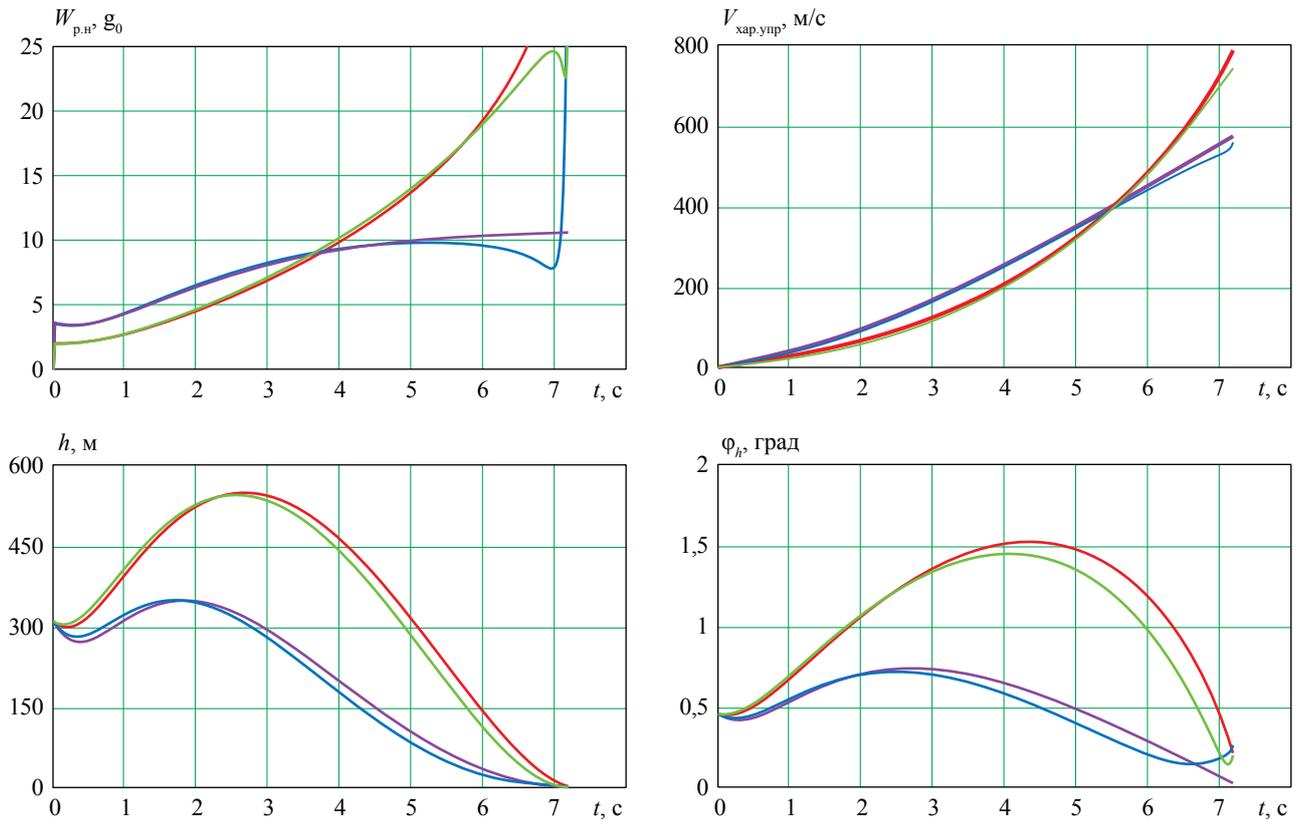
$m_p$  – масса ракеты.

Результаты моделирования полета ракеты для этого случая, для наведения по разным методам, при отработке начальной угловой ошибки  $1^\circ$ , действию на цель сил гравитации и лобового сопротивления и боковом маневре цели с ускорением  $6g_0$ , приведены на рисунке 12.

Из полученных графиков следует, что при переменной скорости ракеты описанные выше соотношения между показателями качества для разных методов наведения имеют тот же характер, что и при выполненном кинематическом анализе.

### В. Результаты оценки методов при варьировании исходных данных

Для оценки степени влияния различных факторов на качество наведения выполнено моделирование наведения ракеты на цель по четырем разным методам пропорциональной навигации с варьированием исходных данных в широких пределах.



**Рис. 12.** Графики показателей качества при тех же условиях, что на рисунке 10, с учетом изменения скорости ракеты под действием сил гравитации и лобового сопротивления  
 —  $PPN$ , —  $TPN$ , —  $IPN$ , —  $PPN-I$

Для моделирования с учетом возможных параметров траекторий баллистических целей, описанных в [27], принимались следующие значения исходных данных:

- угол наклона траектории цели  $\alpha_{ц0}$ :  $30^\circ$ ,  $50^\circ$ ,  $80^\circ$ ;
- ускорение бокового маневра цели: 0, 4,  $6g_0$ ;
- начальная скорость цели  $V_{ц0}$ : 3000, 4000, 5 500 м/с;
- начальная скорость ракеты  $V_{р0}$ : 2000, 2500, 2800 м/с;
- угловая ошибка вывода ракеты:  $0^\circ$ ,  $1^\circ$ ,  $3^\circ$ ;
- начальная высота цели (координата  $y_{ц0}$ ): 50 000, 60 000, 70 000 м, при этом начальная высота ракеты (координата  $y_{р0}$ ), соответственно – 25 000, 35 000, 45 000 м;
- коэффициент метода  $K_M$ : 3, 5, 6, 10.

Моделирование выполнено для наиболее представительных комбинаций перечисленных исходных данных. Ввиду большого объема результатов моделирования графики показателей качества наведения не приводятся.

Во всех случаях характерной тенденцией является существенное (скачкообразное) возрастание формируемых методами  $TPN$  и  $IPN$  управляющих ускорений вблизи цели (за 1–2 с до встречи ракеты с ней).

Для методов  $PPN$  и  $PPN-I$  вблизи цели характерен плавный рост управляющих ускорений или даже их постоянство (выход на метод параллельного сближения) – в зависимости от интенсивности маневра цели в соотношении с величинами скорости ракеты и коэффициента метода  $K_M$ .

Проведена также оценка метода  $PPN-I$  при использовании вместо текущей величины относительной скорости сближения  $V_{сбл}$  ее начального значения  $V_{сбл.0}$ , получаемого по данным наземной РЛС (имитация отсутствия информации от доплеровского приемника ГСН ввиду воздействия на него помех). Также выполнена оценка качества метода при использовании на конечном участке наведения ЗУР вместо параметра  $V_{сбл}$  величины  $\dot{r}_{отн}$ , которая может быть рассчитана



по измерениям доплеровского приемника ГСН. Моделирование показало практическую идентичность получаемых результатов, что позволяет отнести повышенное качество метода *PPN-I*, представленное на приведенных выше графиках, на счет эквивалентного увеличения коэффициента метода  $K_m$  пропорционально отношению  $V_{сбл}/V_p$ , используемому в методе.

Для различных вариантов исходных данных во всех методах лучшее качество наведения достигается при больших значениях коэффициента  $K_m$  (наведение приближается к наведению по методу параллельного сближения). На практике большие значения коэффициента  $K_m$  не используются ввиду усиления шумов в каналах управления и снижения вследствие этого точности наведения, а также в связи с ростом неустойчивости контура управления (появление переколебаний управляющих ускорений). Вместе с тем, как следует из расчетов, при увеличении коэффициента  $K_m$  в определенных пределах наблюдается снижение характеристической управляющей скорости ракеты. Коэффициент метода  $K_m$ , таким образом, является своеобразным параметром компромисса между качеством наведения и ресурсами двигателей ракеты, затрачиваемыми для управления.

### Заключение

Выполненный сравнительный кинематический анализ четырех методов пропорциональной навигации (*PPN*, *TPN*, *IPN*, *PPN-I*) для использования в системе управления ЗУР при наведении на высокоскоростную маневрирующую цель (типа баллистической маневрирующей цели на заключительном участке ее полета) показал предпочтительность методов, формирующих управляющее ускорение ортогонально вектору скорости ракеты – это методы *PPN* и *PPN-I*.

Методы *TPN* и *IPN*, формирующие управляющее ускорение ортогонально, соответственно, линии визирования ракета – цель, и вектору относительной скорости ракеты, имеют резкий рост управляющих ускорений и рост фазы промаха в конце наведения на маневрирующую цель, что приведет

в реальных (не кинематических) системах наведения, которым свойственно наличие ограничений на управление по располагаемым перегрузкам, к росту динамической ошибки наведения и промаху в точке встречи ракеты с целью.

Анализ возможности технической реализации методов показал, что предпочтительными являются методы *PPN* и *TPN*, так как они используют меньший набор параметров для формирования управляющего ускорения по сравнению с методами *IPN*, *PPN-I*, и эти параметры в любом случае измеряются ГСН и ИНС (это вектор угловой скорости линии визирования ракета – цель  $\bar{\Omega}$ , направление на цель  $\bar{l}_r$  и вектор скорости ракеты  $\bar{V}_p$ ). Методы *IPN* и *PPN-I* в дополнение к параметрам  $\bar{\Omega}$  и  $\bar{V}_p$  требуют вычисления вектора относительной скорости  $\bar{V}_{отн}$ . Использование в методах параметра  $\bar{V}_{отн}$  может привести к ухудшению качества наведения при наличии помех по доплеровскому каналу измерения радиальной скорости цели, которая требуется для вычисления вектора  $\bar{V}_{отн}$ .

Таким образом, по совокупности показателей качества наведения и возможности технической реализации, предпочтительным является метод наведения *PPN*. Кроме этого, данный метод является универсальным – он может применяться в системах наведения как с оптическими, так и радиолокационными ГСН.

### Список литературы

1. Newell H. E. Guided Missile Kinematics. Naval Research Labs. USA. 1945.
2. Вермишев Ю. Х. Основы управления ракетами. М.: Воениздат, 1968. 320 с.
3. Ракета 5В21А. Техническое описание. М.: Воениздат, 1969. 152 с.
4. Зенитный ракетный комплекс С-200В. Под ред. Неупокоева Ф.К. Учебник для вузов Войск ПВО страны. Калинин: Изд-во ВКА ПВО им. Г.К. Жукова, 1975. 542 с.
5. Неупокоев Ф. К. Стрельба зенитными ракетами. М.: Воениздат, 1991. 343 с.
6. Zarchan P. Tactical and Strategic Missile Guidance. Published by the American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2012, 1095 p.



7. Zarchan P. Ballistic Missile Defence Guidance and Control Issues. Science and Global Security, 1999, Vol. 8. P. 99–124.
8. Shneydor N. A. Missile Guidance and Pursuit: Kinematics, Dynamics and Control. Horwood Publishing Chichester, 1998. 259 p.
9. Shukla U. S., Mahapatra P. R. The Proportional Navigation Dilemma – Pure or True?, IEEE Trans. Aero. Elec. Syst. 1990. Vol. 26, № 2, P. 382–392.
10. Mahapatra P. R., Shukla U. S. Accurate solution of proportional navigation for maneuvering targets. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, AES-25, 1 (Jan. 1989). P. 81–89.
11. Кринецкий Е. И. Системы самонаведения. М.: Машиностроение, 1970. 236 с.
12. Мизрохи В. Я. Проектирование управления зенитных ракет. Учебно-научное издание. М.: «Экслибрис-Пресс», 2010. 252 с.
13. Архангельский И. И., Афанасьев П. П., Болотов Е. Г., Голубев И. С., Матвеев А. М., Мизрохи В. Я., Новиков В. Н., Остапенко С. Н., Светлов В. Г. Проектирование зенитных управляемых ракет / Под ред. И. С. Голубева и В. Г. Светлова. М.: Изд-во МАИ, 2001. 732 с.
14. Беляев А. В. Пять доступных лекций по наведению ракет. М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2018. 88 с.
15. Кан В. Л., Кельзон А. С. О точных решениях уравнений пропорциональной навигации, Известия вузов. Математика, 1962. № 1. С. 50–56
16. Кан В. Л., Кельзон А. С. Об устойчивых и неустойчивых траекториях пропорциональной навигации, Доклады АН СССР. 1960. Т. 130, № 6. С. 1220–1223.
17. Кельзон А. С., Григорьева О. В. Пропорциональная навигация как проблема кибернетики. Доклады АН СССР. 1958. Т. 121, № 3. С. 432–435.
18. Proportional navigation. [https://en.wikipedia.org/wiki/Proportional\\_navigation](https://en.wikipedia.org/wiki/Proportional_navigation)
19. Yanushevsky, R. Modern Missile Guidance. CRC Press, 2007. 226 p.
20. Бухгольц Н. Н. Основы курса теоретической механики. Часть 1. Кинематика, статика, динамика материальной точки. М.: Наука, 1965. 468 с.
21. Основы радиоуправления. Учебное пособие для вузов / Под ред. Вейцеля В. А. и Типугина В. Н. М.: Советское радио, 1973. 464 с.
22. Кочетков В. Т., Половко А. М., Понамарев В. М. Теория систем телеуправления и самонаведения ракет. М.: Наука. 1964. 536 с.
23. Аппазов Р. Ф., Лавров С. С., Мишин В. П. Баллистика управляемых ракет дальнего действия. М.: «Наука», Глав. ред. физ.-мат. литературы, 1966. 308 с.
24. Дмитриевский А. А., Лысенко Л. Н., Богодистов С. С. Внешняя баллистика. Учебник для студентов вузов. М.: Машиностроение, 1991. 640 с.
25. Созинов П. А., Горевич Б. Н. Методы оценки и исследование зависимости точности целеуказания бортовому локатору ракеты от ошибок определения координат цели и ракеты наземным локатором // Вестник «Концерна ВКО «Алмаз – Антей». 2021. № 1. С. 22–41.
26. Ненартович Н. Э., Горевич Б. Н. Математическое описание движения и оценка маневренных возможностей кинетического перехватчика с двигателем поперечного управления // Вестник «Концерна ВКО «Алмаз – Антей». 2019. № 2. С. 94–104.
27. Ненартович Н. Э., Горевич Б. Н. BMDS – Система противоракетной обороны США. Анализ и моделирование. М.: ПАО «НПО «Алмаз», 2020. 351 с.

### Об авторах

**Созинов Павел Алексеевич** – доктор технических наук, профессор, генеральный конструктор акционерного общества «Концерн воздушно-космической обороны «Алмаз – Антей», Москва, Российская Федерация. Область научных интересов: разработка научных основ построения и развития системы воздушно-космической обороны России.

**Горевич Борис Николаевич** – доктор технических наук, профессор, руководитель проекта акционерного общества «Концерн воздушно-космической обороны «Алмаз – Антей», Москва, Российская Федерация. Область научных интересов: системный анализ, теория построения зенитного ракетного вооружения.



## **Kinematic analysis of proportional navigation methods as applicable to surface-to-air missile guidance to a ballistic target**

Sozinov P. A., Gorevich B. N.

*JSC “Almaz – Antey” Air and Space Defence Corporation, Moscow, Russian Federation*

A kinematic analysis of four proportional navigation methods (PPN, TPN, IPN, PPN-I) has been performed. A physical and mathematical description of the methods is given and a model of SAM motion towards a ballistic target has been built.

The guidance quality indices are specified and substantiated, namely, normal accelerations, instantaneous miss (magnitude and phase), and characteristic control velocity.

Evaluation of SAM guidance quality at the final leg of ballistic target motion has been drawn for different methods. A comparative analysis of the methods has been made, with consideration of the achievable quality indices and possibilities for technical implementation.

*Keywords:* surface-to-air missile (SAM), proportional navigation method, missile kinematics

---

### **Information about the authors**

**Sozinov Pavel Alekseevich** – Doctor of Engineering Sciences, Professor, General Designer, JSC “Almaz – Antey” Air and Space Defence Corporation, Moscow, Russian Federation.

Science research interests: development of scientific foundations for the construction and development of the aerospace defence system of Russia.

**Gorevich Boris Nikolaevich** – Doctor of Engineering Sciences, Professor, Project Manager, JSC “Almaz – Antey” Air and Space Defence Corporation, Russian Federation.

Science research interests: system analysis, air defence missile systems design theory.