ДУАЛЬНЫЕ ПОЛИЭДРЫ И КОМБИНАЦИИ КРИСТАЛЛОГРАФИЧЕСКИХ ПРОСТЫХ ФОРМ

Войтеховский Ю.Л.
Геологический институт КНЦ РАН, Апатиты, woyt@geoksc.apatity.ru

DUAL POLYHEDRA AND COMBINATIONS OF PRIME CRYSTALLOGRAPHIC FORMS

Voytekhovsky Yu.L.
Geological Institute KSC RAS, Apatity, woyt@geoksc.apatity.ru

The article delineates the variety of convex 4- … 12 polyhedra from the angle of their autoduality. It is shown that the range from the primitive (containing one polyhedron) to the endless (e.g., the whole variety of convex polyhedra) comprises a set of autodual varieties with a similar structure, i.e. they are composed of autodual polyhedra and couples of dual ones. The simplest examples have been considered. The variety of polyhedral (closed) prime forms in some crystallographic symmetry classes have been analyzed from this point of view. It is shown that some classes may be related to the autodual ones, while others require a strict definition of some combinations of prime forms for that.

В работах [3, 4] подробно изложен алгоритм акад. Е.С. Фёдорова генерирования полного комбинаторного многообразия выпуклых полиэдров из тетраэдра и приведены результаты его компьютерного использования, составляющие на сегодня мировой рекорд в части характеризации полученных форм точечными группами симметрии, а не порядками групп автоморфизмов, как это принято в теории графов. Тем самым результаты приспособлены для применения в области кристаллографии и минералогии и фактически составляют комбинаторно-геометрическое основание классической кристалломорфологии. В работах [1, 2] показано применение авторских подходов к перечислению полных комбинаторно-геометрических многообразий некоторых простых форм, а также комбинации куба и октаэдра, что важно, в частности, для описания природных кристаллов алмаза. Сводные таблицы, характеризующие многообразия выпуклых полиэдров по комбинаторным типам и, в особенности, по точечным группам симметрии, позволяют сформулировать множество сугубо математических и прикладных – кристалломорфологических – вопросов (табл. 1). Один из них – о дуальных полиэдрах, их многообразиях и комбинациях простых форм – рассматривается в этой статье.

Таблица 1. Числа комбинаторно различных выпуклых полиэдров с F гранями и V вершинами.

↓F, V→	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
4	1												
5		1	1										
6		1	2	2	2								
7			2	8	11	8	5						
8			2	11	42	74	76	38	**14**				
9				8	74	296	633	768	558	219	**50**		
10				5	76	633	2635	6134	8822	7916	4442	1404	233
11					38	768	6134	25626	64439	104213	112082	79773	36528
12					14	558	8822	64439	268394	709302	1263032	1556952	1338853

Примечание. Красным показаны классы полиэдров, изученные Е.С. Фёдоровым [5] в ходе апробации оригинального алгоритма, оптимизированного и использованного в [3, 4].

Продолжение табл. 1.

↓F, V→	16	17	18	19	20	22	24	26	28
10	233								
11	36528	9714	1249						
12	1338853	789749	306470	70454	7595				
13						49566			
14							339722		
15								2406841	
16									17490241

В табл. 1 показаны числа комбинаторно различных выпуклых полиэдров с F гранями и V вершинами. Поразительно, как быстро нарастает многообразие с ростом числа вершин. Легко видеть, что таблица симметрична относительно главной диагонали, т.е. числа полиэдров в классах (F, V) и (V, F) равны в силу дуального перехода, понятного из рис. 1 на примере тетраэдра: если на гранях полиэдра взять по точке и соединить отрезками те и только те из них, которые лежат на смежных гранях, то получится полиэдр, дуальный исходному. Для тетраэдра дуальным является также тетраэдр (тетраэдр переходит в себя), что выделяет его – и без того замечательного (симплекс, одно из платоновых тел, высокая симметрия -43m) – в особый род полиэдров. Обобщая, **назовём автодуальным полиэдр, для которого дуальный имеет тот же комбинаторный тип**. На рис. 1 показаны дуальные преобразования для других платоновых тел: куб и октаэдр (m-3m) переходят друг в друга, додекаэдр и икосаэдр (-5-3m) – друг в друга. Но ведь при этом всё многообразие платоновых тел переходит в себя! На это основании **назовём автодуальным многообразие полиэдров, в целом переходящее в себя при дуальном преобразовании каждого из полиэдров**. В принципе, все автодуальные многообразия устроены одинаково – из автодуальных индивидов и пар взаимно дуальных полиэдров. Есть ли другие, естественным образом определённые автодуальные многообразия полиэдров? Одним из таковых является полное многообразие выпуклых полиэдров – просто потому, что в нём каждый полиэдр переходит в некоторый полиэдр этого же многообразия. Очевидно, бесконечное множество автодуальных многообразий образуют классы полиэдров с F = V = 4, 5, 6 … (табл. 2).

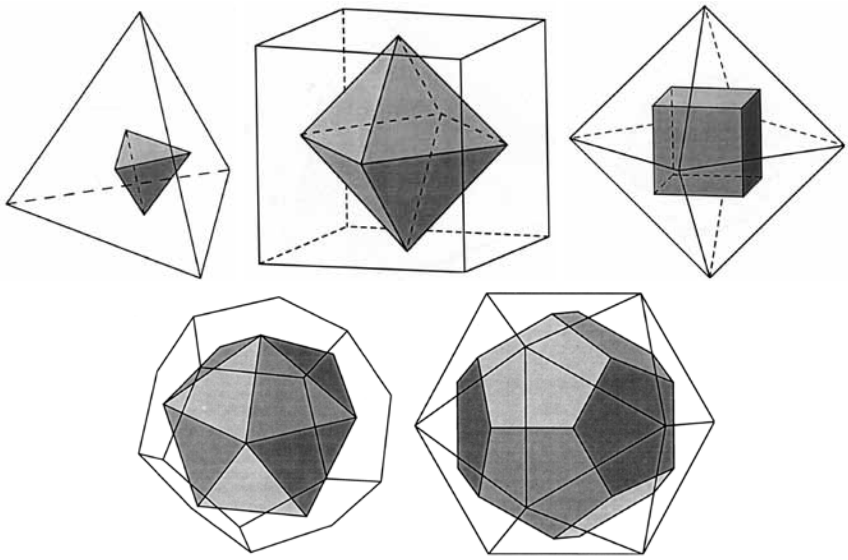

Рис. 1. Дуальные переходы платоновых тел.

Понятно, что класс (F, V) = (4, 4) образован тетраэдром (рис. 1). Но каким полиэдром образован класс (5, 5)? Из работы [3] легко извлекаем, что это – тетрагональная пирамида (в геометрическом смысле, т.к. кристаллографическая пирамида мыслится без основания и, по сути, полиэдром не является). Легко понять, что всякая пирамида автодуальна. На этом основании для удобства **назовём пирамидальными многообразия полиэдров F = V**. Но только ли пирамиды автодуальны в автодуальных многообразиях F = V? Отнюдь нет. Так, автодуальный класс (6, 6) состоит из двух полиэдров (табл. 2). Но один из них – пирамида. Следовательно, и второй полиэдр непременно автодуален (рис. 2).

Таблица 2. Автодуальные многообразия полиэдров с F = V (показаны красным) образуют диагональ таблицы.

↓F, V→	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
4	1												
5		**1**	1										
6		1	**2**	2	2								
7			2	**8**	11	8	5						
8			2	11	**42**	74	76	38	14				
9				8	74	**296**	633	768	558	219	50		
10				5	76	633	**2635**	6134	8822	7916	4442	1404	233
11					38	768	6134	**25626**	64439	104213	112082	79773	36528
12					14	558	8822	64439	**268394**	709302	1263032	1556952	1338853

Аналогично проанализируем автодуальное многообразие (7, 7) из восьми полиэдров (табл. 2, рис. 3). Полиэдр № 8 – гексагональная пирамида. Есть ли среди №№ 1-7 автодуальные полиэдры? Чтобы ответить на этот вопрос, рассмотрим их точечные группы симметрии [3]: 1 (№№ 1, 6), 2 (№ 2), m (№№ 3, 7), 3m (№№ 4, 5), 6mm (№ 8). (Они характеризуют полиэдры, расправленные в 3D, а не их прекции Шле-

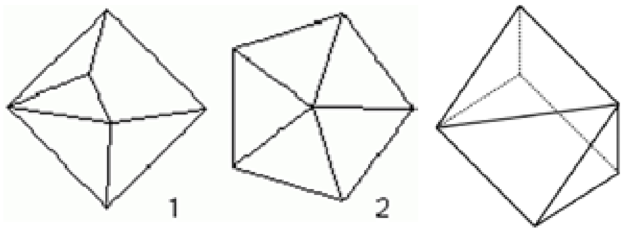

Рис. 2. Автодуальное многообразие (6, 6) в проекции Шлегеля на одну из граней полиэдра [3]. № 2 – пентагональная пирамида, № 1 – по необходимости автодуальный 6-эдр. Справа – он же в «расправленном» виде.

геля на рис. 3.) Легко видеть, что уникальными являются полиэдры № 2 (т.г.к.с. 2) и № 8 (т.г.к.с. 6mm). В пределах автодуального многообразия (7, 7) им нет дуальной пары. Поэтому они автодуальны. Если № 8 – легко узнаваемая в проекции Шлегеля пирамида, то автодуальность полиэдра № 2 не очевидна. Анализ точечных групп комбинаторной симметрии сыграл в его распознавании решающую роль. Эффективность этого приёма мы используем в дальнейшем. Есть ли автодуальные полиэдры среди №№ 1, 3-7? Для исследования этого вопроса эффективным шагом является анализ гранных (г.с.) и вершинных символов (в.с.) полиэдров, показывающих, соответственно, последовательности n-угольных граней и n-валентных вершин. При дуальном переходе гранный символ исходного полиэдра переходит в вершинный символ дуального, и наоборот. У автодуального полиэдра оба символа должны совпадать – необходимое, но недостаточное условие. Приведём гранные и вершинные символы для полиэдров №№1, 3-7. Т.г.к.с. 1: № 1 – г.с. 43, в.с. 43; № 6 – г.с. 511, в.с. 511. Т.г.к.с. m: № 3 – г.с. 43, в.с. 511; № 7 – г.с. 511, в.с. 43. Т.г.к.с. 3m: № 4 – г.с. 43, в.с. 43; № 5 – г.с. 43, в.с. 43. Понятно, что №№ 1 и 6 – автодуальные полиэдры, №№ 3 и 7 – пара дуальных полиэдров. Предоставляем читателю самостоятельно решить вопрос об автодуальности или дуальности пары полиэдров №№ 4 и 5. Известные критерии вопрос не решают. Вероятно, нужно попросту расправить их проекции Шлегеля (рис. 3) в 3D и построить для каждого дуальный полиэдр, закончив анализ их визуальным сравнением.

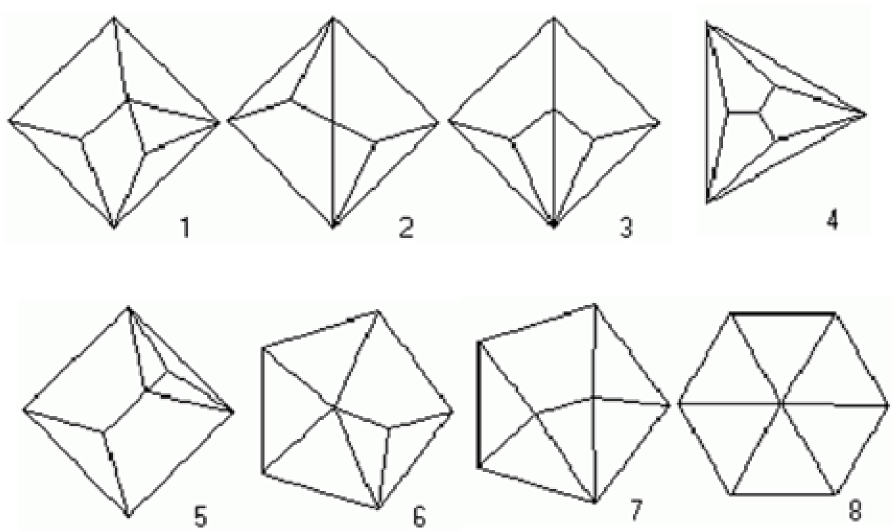

Рис. 3. Автодуальное многообразие (7, 7) в проекции Шлегеля на одну из граней полиэдра [3].

Подведём итог сказанному о дуальных и автодуальных выпуклых полиэдрах и их многообразиях. В диапазоне от примитивного (содержащего 1 полиэдр, например, симплекс или класс (5, 5), табл. 2) до бесконечного (полное многообразие выпуклых полиэдров) существует бесконечно много автодуальных многообразий (например, платоновы тела, классы F = V > 5), в принципе, устроенных одинаково – из автодуальных полиэдров (их бесконечно много, например, все пирамиды) и дуальных пар. Число дуальных (но не автодуальных) многообразий также бесконечно (например, все классы (F, V) и (V, F) при F ≠ V). При анализе дуальных полиэдров важнейшую роль играют точечные группы комбинаторной симметрии (у дуальных полиэдров они совпадают), а также гранные и вершинные символы (у дуальных полиэдров гранный символ одного совпадает с вершинным – другого, у автодуального полиэдра они совпадают).

Рассмотрим многообразия полиэдрических простых форм в 32 кристаллографических классах с точки зрения их автодуальности. Вопрос стоит следующим образом: все ли дуальные формы реализуются в кристаллографических классах? По-видимому, он никогда ранее не обсуждался, хотя представляет интерес. Действительно, каждый из трёх тетраэдров автодуален, куб и октаэдр – дуальные формы – широко

Рис. 4. Кубические, октаэдрические и кубооктаэдрические кристаллы флюорита [http://geo.web.ru/druza/L-Dalnegor_M.htm, http://geo.web.ru/druza/m-flu_33-pg138.htm].

проявлены на кристаллах и часто сменяют друг друга в процессе роста (рис. 4). В низшей категории, в ромбической сингонии, есть лишь две полиэдрические формы: тетраэдр (класс 222) и бипирамида (mmm).

Таблица 3. Простые формы низших сингоний.

Название простой формы	Триклинная		Моноклинная			Ромбическая		
	Класс							
	1	$\bar{1}$	2	*m*	2/*m*	222	*mm*2	*mmm*
Моноэдр (1)	+		+	+			+	
Пинакоид (2)		+	+	+	++	+	+	+
Диэдр (2)			+	+			+	
Пирамида ромбическая (4)							+	
Призма ромбическая (4)					+	+	+	+
Тетраэдр ромбический (4)						+		
Бипирамида ромбическая (8)								+

Примечание. Число, стоящее рядом с названием простой формы, указывает количество ее граней, знак плюс – наличие той или иной формы в данном классе, два плюса – наличие двух различных по симметрии граней простых форм.

Но тетраэдр автодуален, поэтому класс 222 может считаться автодуальным. По той же причине автодуален класс -4 тетрагональной сингонии, из полиэдрических простых форм содержащий лишь тетрагональный тетраэдр. Класс mmm преподносит первый сюрприз: бипирамида дуальна геометрической призме, которая эквивалентна комбинации кристаллографической призмы и пинакоида, присутствующих в классе. То есть, класс mmm может считаться автодуальным, если комбинацию призмы и пинакоида включить в список форм явно! То же можно сказать про классы 4/m (тетрагональная бипирамида + тетрагональная призма + пинакоид) и 4/mm (дитетрагональная бипирамида + дитетрагональная призма + тетрагональная бипирамида + тетрагональная призма + пинакоид) тетрагональной сингонии, а также классы -6 (тригональная бипирамида + тригональная призма + пинакоид), 6/m (гексагональная бипирамида + гексагональная призма + пинакоид), -6m2 (гексагональная бипирамида + гексагональная призма + дитригональная бипирамида

Рис. 5. Комбинация ромбической бипирамиды, ромбической призмы и пинакоида на кристаллах топаза [http://geo.web.ru/druza/m-topaz-F.htm].

+ дитригональная призма + тригональная бипирамида + тригональная призма + пинакоид) и 6/mmm (дигексагональная бипирамида + дигексагональная призма + гексагональная бипирамида + гексагональная призма + пинакоид) гексагональной сингонии. В качестве иллюстрации сосуществующих бипирамид и дуальных им комбинаций призм и пинакоидов покажем замечательные формы кристаллов топаза (рис. 5).

Таблица 4. Простые формы кубической сингонии.

Название простой формы	Класс				
	23	$m3$	432	$\bar{4}3m$	$m\bar{3}m$
Тетраэдр (4)	+			+	
Гексаэдр (6)	+	+	+	+	+
Октаэдр (8)		+	+		+
Ромбододекаэдр (12)	+	+	+	+	+
Пентагондодекаэдр (12)	+	+			
Тригонтритетраэдр (12)	+			+	
Тетрагонтритетраэдр (12)	+			+	
Пентагонтритетраэдр (12)					
Гексатетраэдр (24)				+	
Тригонтриоктаэдр (24)		+	+		+
Тетрагонтриоктаэдр (24)		+	+		+
Пентагонтриоктаэдр (24)			+		
Тетрагексаэдр (24)			+	+	+
Дидодекаэдр (24)		+			
Гексоктаэдр (48)					+

Простые формы кубической сингонии предоставляют для анализа ещё более богатые факты. Очевидно, кубический тетраэдр автодуален, а куб и октаэдр образуют дуальную пару. Но в этой очевидности кроется загадка. В классах 23 и -43m куб есть, но октаэдра нет (табл. 4)! Значит, эти дуальные формы в указанных классах не реализуются? Выход видится в том, что октаэдр получается комбинацией двух тетраэдров, присутствующих в этих классах. В качестве более сложных ситуаций рассмотрим классы 432 и m-3m (показаны красным), изобилующие формами с большим числом граней. Их дуальные переходы показаны на рис 6-11. Как видно, все дуальные формы суть комбинации куба, октаэдра, ромбододекаэдра и (в одном случае) пентагонтриоктаэдра. То есть, эти классы можно считать автодуальными, если явно определить в них указанные комбинации. Классы симметрии 23, m3 и m-3m пока не исследованы.

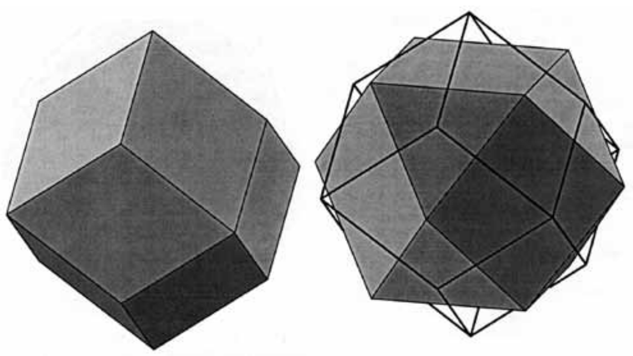

Рис. 6. Ромбододекаэдр дуален комбинации куба и октаэдра (архимедову кубооктаэдру).

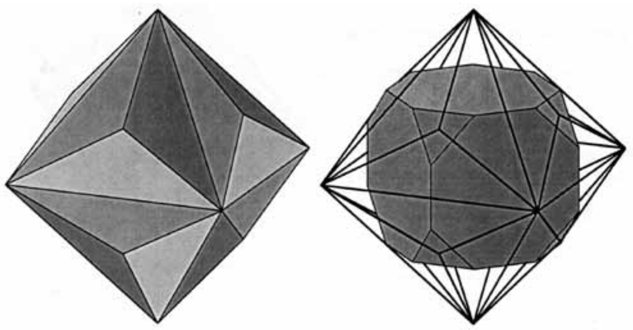

Рис. 7. Тригонтриоктаэдр дуален кубу, усечённому гранями октаэдра.

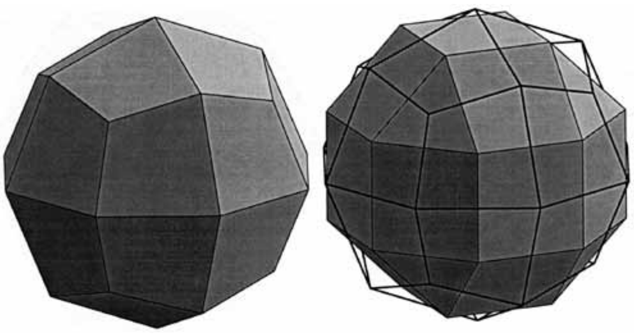

Рис. 8. Тетрагонтриоктаэдр дуален комбинации куба, октаэдра и ромбододекаэдра.

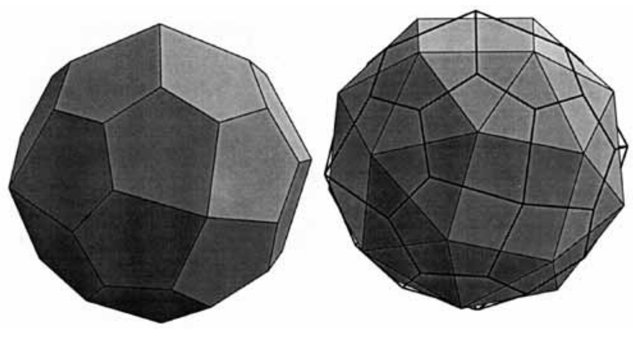

Рис. 9. Пентагонтриоктаэдр дуален комбинации куба, октаэдра и (!) пентагонтриоктаэдра.

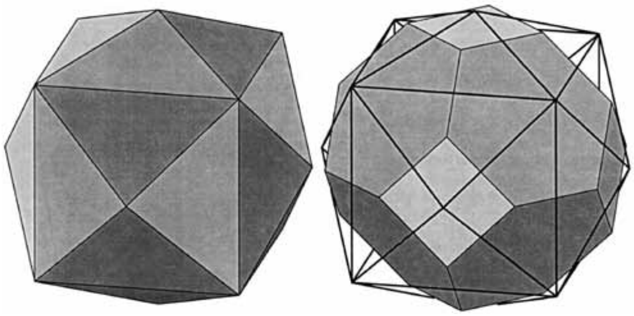

Рис. 10. Тетрагексаэдр дуален октаэдру, усечённому гранями куба.

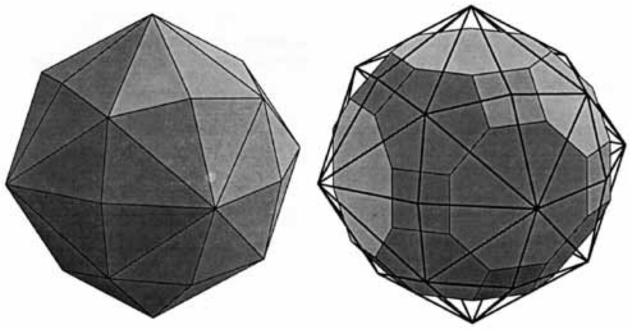

Рис. 11. Гексоктаэдр дуален комбинации куба, октаэдра и ромбододекаэдра.

Выводы:

- процедура дуального преобразования выявляет новые связи между полиэдрическими (замкнутыми) простыми формами одного кристаллографического класса;
- в сингониях низшей и средней категорий пинакоид «нужен» для обеспечения форм, дуальных к бипирамидам – комбинаций одноименных призм и пинакоидов;
- многообразия простых форм в кристаллографических классах распадаются по признаку автодуальности на два типа: автодуальные и условно автодуальные;
- условно автодуальные многообразия требуют явного определения комбинаций простых форм как неотъемлемых частей многообразий (ромбододекаэдр, тригонтриоктаэдр и тетрагексаэдр дуальны комбинациям куба и октаэдра; тетрагонтриоктаэдр и гексоктаэдр – комбинациям куба, октаэдра и ромбододекаэдра и т.д.)
- важность теоретического анализа обосновывается тем, что в природном минералообразовании дуальные переходы широко распространены: куб сменяется октаэдром (и наоборот), бипирамиды – комбинациями одноименных призм и пинакоидов и т.д.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Войтеховский Ю.Л., Степенщиков Д.Г. Комбинаторная кристалломорфология. I. Реальные кристаллографические простые формы. Апатиты: Изд-во K & M, 2004. 275 с.
2. Войтеховский Ю.Л., Степенщиков Д.Г. Комбинаторная кристалломорфология. III. Комбинации куба и октаэдра. Апатиты: Изд-во K & M, 2007. 834 с.
3. Войтеховский Ю.Л., Степенщиков Д.Г. Комбинаторная кристалломорфология. IV. Выпуклые полиэдры. Т. I: 4- … 12-эдры. Апатиты: Изд-во K & M, 2008. 833 с.
4. Войтеховский Ю.Л., Степенщиков Д.Г. Комбинаторная кристалломорфология. IV. Выпуклые полиэдры. Т. II: Простые 13- … 16-эдры. Апатиты: Изд-во K & M, 2008. 828 с.
5. Фёдоров Е.С. Основания морфологии и систематики многогранников // Зап. Импер. С.-Петербург. минерал. об-ва. 1893. Ч. 30. С. 241-341.